

# 求解 Hamilton-Jacobi 方程的四阶 WENO 格式

程晓晗, 封建湖

(长安大学 理学院 陕西 西安 710064)

**摘要:** 提出一种四阶 WENO 重构, 该重构通过非线性权机制在不同模板之间自动切换: 在光滑区域选择中心模板从而达到最优的四阶精度; 在间断区域选择某一最光滑子模板从而保证间断附近的基本无振荡特性。将其与全局 Lax-Friedrichs 通量相结合, 对半离散格式采用三阶 Runge-Kutta 方法在时间方向上推进, 得到了一种求解 Hamilton-Jacobi 方程的高阶有限差分格式。数值算例验证了该方法的四阶精度和基本无振荡特性。

**关键词:** Hamilton-Jacobi 方程; WENO 重构; Runge-Kutta 时间离散; 非线性权

中图分类号: O241

文献标志码: A

文章编号: 1671-6841(2022)05-0090-05

DOI: 10.13705/j.issn.1671-6841.2021387

## A Fourth Order WENO Scheme for Hamilton-Jacobi Equations

CHENG Xiaohan, FENG Jianhu

(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

**Abstract:** A fourth order WENO reconstruction was proposed. This construction switched between the big central stencil and the smoothest substencils via the nonlinear weights mechanism. The construction was the optimal fourth order accuracy in smooth areas and non-oscillatory near discontinuities. After that, a high order finite difference scheme was presented by employing the global Lax-Friedrichs flux and the third order Runge-Kutta time discretization method. Numerical examples were provided to verify the desired accuracy and essential non-oscillation of our scheme.

**Key words:** Hamilton-Jacobi equations; WENO reconstruction; Runge-Kutta time discretization; nonlinear weights

## 0 引言

Hamilton-Jacobi (H-J) 方程在图像处理、计算机视觉、最优控制和几何光学等领域有着非常广泛的应用。由于 H-J 方程的解析解在绝大多数情况下无法获得, 因此数值模拟已成为研究该类方程的有效手段。众所周知, Discontinuous Galerkin (DG) 方法和 Weighted Essentially Non-oscillatory (WENO) 方法在近年来得到了快速发展, 已被成功应用于双曲守恒律方程的数值求解中<sup>[1-2]</sup>。在一维情形下, 选取  $u = \phi_x$  即可使 H-J 方程转换为双曲守恒律方程。正是鉴于 H-J 方程与双曲守恒律方程之间的紧密联

系, 许多学者尝试将 DG 方法和 WENO 方法应用于 H-J 方程的数值求解中<sup>[3-6]</sup>。有限差分 WENO 方法具有程序设计简单、易于向高维推广的优点, 因而获得了广泛关注。通常情况下, 求解 H-J 方程的 WENO 方法包括三个要素: 单调数值通量、WENO 重构和时间层推进方法。由于单调数值通量和时间层推进方法的发展已经很成熟, WENO 方法的关键在于 WENO 重构的选取。文献[4]首次将经典 WENO 重构引入到 H-J 方程的求解中。Huang 构造了新的光滑因子来提高 WENO 方法的精度和分辨率<sup>[7]</sup>。近期提出的新的 WENO 重构<sup>[6]</sup>关于线性权的选取较为简单, 使得格式易于推广至非结构网格。上述  $r$  阶 WENO 重构在近似  $\phi_{x,i}^*$  时共用到了  $r + 2$

收稿日期: 2021-09-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(11601037, 11971075, 11901051); 陕西省自然科学基金项目(2018JQ1027); 中央高校基本科研业务费项目(300102120107)。

第一作者: 程晓晗(1987—), 男, 副教授, 主要从事偏微分方程数值解研究, E-mail: xhcheng@chd.edu.cn。

个节点。事实上,  $r + 2$  个节点可以达到  $\phi_{x,i}^{\pm}$  的  $r + 1$  阶近似。基于此出发点, 本文提出一种四阶 WENO 重构, 该重构在近似  $\phi_{x,i}^{\pm}$  时只需要使用 5 个节点。将其与全局 Lax-Friedrichs 通量相结合, 对半离散格式采用三阶 Runge-Kutta 方法在时间方向上推进, 得到了一种求解 Hamilton-Jacobi 方程的高阶有限差分格式。最后通过几个标准的数值算例来验证该方法的四阶精度和基本无振荡特性。

### 1 数值方法

考虑一维 H-J 方程初值问题

$$\begin{cases} \phi_t + H(x, t, \phi, \phi_x) = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

为简单起见, 将待求解区域均匀划分为  $N$  个网格单元  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , 其中  $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  为网格步长。求解式(1)的半离散形式为

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = L(\phi_i) = -\hat{H}(x_i, t, \phi_i, \phi_{x,i}^+, \phi_{x,i}^-), \quad (2)$$

其中:  $\phi_i$  表示  $\phi(x_i, t)$  的数值近似;  $\phi_{x,i}^{\pm}$  表示  $\phi_x(x_i, t)$  的左右侧数值近似;  $\hat{H}$  是 Lipschitz 连续的单调通量且与  $H$  相容, 即  $\hat{H}(x, t, \phi, \phi_x, \phi_x) = H(x, t, \phi, \phi_x)$ 。本文选取简单实用的全局 Lax-Friedrichs 通量

$$\begin{aligned} \hat{H}(x_i, t, \phi_i, \phi_{x,i}^+, \phi_{x,i}^-) &= H(x_i, t, \phi_i, \frac{\phi_{x,i}^+ + \phi_{x,i}^-}{2}) - \\ &\alpha \frac{\phi_{x,i}^+ - \phi_{x,i}^-}{2}, \quad \alpha = \max_{\phi_x} |H_1(\phi_x)|, \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $H_1$  是算子  $H$  关于  $\phi_x$  的偏导数。需要指出的是, 半离散格式(2)的空间精度取决于计算  $\phi_{x,i}^{\pm}$  所采用的 WENO 重构的精度。传统三阶 WENO 重构分别在模板  $SL$  和  $SR$  (如图 1 所示) 上计算  $\phi_{x,i}^-$  和  $\phi_{x,i}^+$ , 共使用了 5 个节点。本文提出一种四阶 WENO 重构, 直接在模板  $S$  (如图 1 所示) 上来计算  $\phi_{x,i}^{\pm}$ 。下面以  $\phi_{x,i}^-$  为例来介绍其过程, 按照下述步骤关于  $x_i$  作对称即可获得  $\phi_{x,i}^+$ 。为方便起见, 记  $\Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i$ 。

步骤 1 给定子模板  $S_0 = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}$ ,  $S_1 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ ,  $S_2 = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$  (如图 1 所示), 构造线性多项式  $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$  满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_k(x) dx &= \frac{\Delta\phi_j}{h}, \quad j = i - 2 + k, \\ i - 1 + k, \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

则可得  $\phi_x(x_i)$  的三种二阶近似为

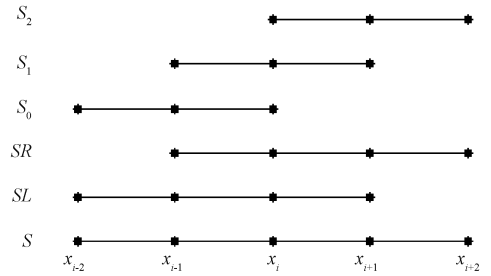


图 1 重构模板

Figure 1 Stencils for the reconstruction

$$\begin{cases} \phi_{x,i}^{-,0} = p_0(x_i) = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2} \Delta\phi_{i-2} + \frac{3}{2} \Delta\phi_{i-1} \right), \\ \phi_{x,i}^{-,1} = p_1(x_i) = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2} \Delta\phi_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta\phi_i \right), \\ \phi_{x,i}^{-,2} = p_2(x_i) = \frac{1}{h} \left( \frac{3}{2} \Delta\phi_i - \frac{1}{2} \Delta\phi_{i+1} \right). \end{cases} \quad (5)$$

步骤 2 若在模板  $S = \{S_0, S_1, S_2\}$  上构造三次多项式  $p(x)$  满足

$$\frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x) dx = \frac{\Delta\phi_j}{h}, \quad j = i - 2, i - 1, i, i + 1, \quad (6)$$

则可得  $\phi_x(x_i)$  的四阶近似为

$$\phi_{x,i}^{-,*} = p(x_i) = \frac{1}{12h} (-\Delta\phi_{i-2} + 7\Delta\phi_{i-1} + 7\Delta\phi_i - \Delta\phi_{i+1}). \quad (7)$$

步骤 3 将  $\phi_{x,i}^{-,*}$  写成  $\phi_{x,i}^{-,0}, \phi_{x,i}^{-,1}$  和  $\phi_{x,i}^{-,2}$  的线性组合

$$\phi_{x,i}^{-,*} = d_0 \phi_{x,i}^{-,0} + d_1 \phi_{x,i}^{-,1} + d_2 \phi_{x,i}^{-,2}, \quad (8)$$

其中线性权为  $d_0 = 1/6, d_1 = 2/3, d_2 = 1/6$ 。

步骤 4 类似于 Borges 等的思想<sup>[8]</sup>, 选取非线性权为

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{k=0}^2 \alpha_k}, \quad \alpha_k = d_k \left( 1 + \frac{\tau}{\beta_k + \varepsilon} \right), \quad k = 0, 1, 2. \quad (9)$$

$\varepsilon$  的引入是为了防止分母为零, 本文中选取  $\varepsilon = 10^{-6}$ 。  $\beta_0, \beta_1$  为模板  $S_0, S_1$  的光滑因子, 即

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{(\Delta\phi_{i-1} - \Delta\phi_{i-2})^2}{h^2}, \\ \beta_1 &= \frac{(\Delta\phi_i - \Delta\phi_{i-1})^2}{h^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

$\beta_2$  为模板  $S$  的光滑因子, 即

$$\beta_2 = \frac{1}{240h^2} [\Delta\phi_{i-2} (547\Delta\phi_{i-2} - 2522\Delta\phi_{i-1} + 1922\Delta\phi_i - 494\Delta\phi_{i+1}) + \Delta\phi_{i-1} (3443\Delta\phi_{i-1} -$$

$$5\ 966\Delta\phi_i + 1\ 602\Delta\phi_{i+1}) + \Delta\phi_i(2\ 843\Delta\phi_i - 1\ 642\Delta\phi_{i+1}) + 267\Delta\phi_{i+1}^2]. \quad (11)$$

选取参数  $\tau$  为

$$\tau = \left( \frac{|\beta_2 - \beta_0| + |\beta_2 - \beta_1|}{2} \right)^2. \quad (12)$$

将  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  在点  $x_i$  处进行泰勒展开有

$$\begin{cases} \beta_0 = h^2(\phi_i'')^2 - 2h^3\phi_i''\phi_i^{(3)} + O(h^4), \\ \beta_1 = h^2(\phi_i'')^2 + \frac{1}{6}h^4\phi_i''\phi_i^{(4)} + O(h^6), \\ \beta_2 = h^2(\phi_i'')^2 - h^3\phi_i''\phi_i^{(3)} + O(h^4). \end{cases} \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)可得  $\tau = O(h^6)$ 。当  $\varepsilon \ll \beta_k$  时有

$$\frac{\tau}{\beta_k + \varepsilon} = O(h^4), \quad (14)$$

从而可得非线性权满足数值格式四阶精度的充分条件  $\omega_k = d_k + O(h^3)$ <sup>[8]</sup>, 即式(15)是  $\phi_{x,i}^-$  的一种四阶近似。

步骤 5 将  $\phi_{x,i}^-$  写成  $\phi_{x,i}^{-,0}, \phi_{x,i}^{-,1}$  和  $\phi_{x,i}^{-,2}$  的非线性凸组合的形式

$$\phi_{x,i}^- = \omega_0\phi_{x,i}^{-,0} + \omega_1\phi_{x,i}^{-,1} + \omega_2\phi_{x,i}^{-,2}. \quad (15)$$

步骤 6 对半离散格式(2)在时间方向上的离散采用三阶 Runge-Kutta 方法<sup>[9]</sup>

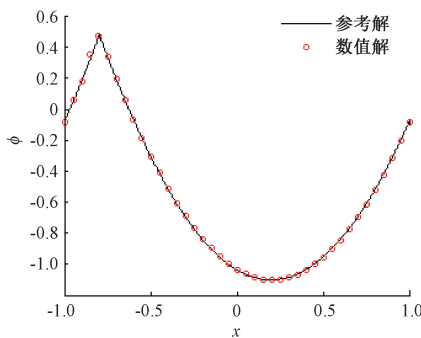
$$\begin{cases} \phi^{(1)} = \phi^n + \Delta t L(\phi^n), \\ \phi^{(2)} = \frac{3}{4}\phi^n + \frac{1}{4}\phi^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(\phi^{(1)}), \\ \phi^{n+1} = \frac{1}{3}\phi^n + \frac{2}{3}\phi^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\phi^{(2)}), \end{cases} \quad (16)$$

就可得到下一时间层的解。

以上方法可按照逐维计算的方法直接推广至多维情形, 在此不再赘述。

## 2 数值试验

下面给出几个一维和二维经典算例来检验本文



(a) 凸H情形

的四阶 WENO 格式(WENO4)的性能。

算例 1 考虑线性对流方程

$$\begin{cases} \phi_t + \phi_x = 0, \\ \phi(x, 0) = -\cos(\pi x), \end{cases}$$

该方程的精确解是  $\phi(x, t) = -\cos(\pi(x - t))$ , 用来测试格式的数值精度。为了使时间方向也能达到四阶精度, 我们取时间步长  $\Delta t = \Delta x^{4/3}$ 。采用不同网格点数计算到  $t = 2$ , 在区间  $[-1, 1]$  上的  $L^1$  和  $L^\infty$  误差如表 1 所示。可以看出, WENO4 格式达到了理论上的四阶精度。

表 1 格式的数值精度(一维情形)

Table 1 Numerical accuracy of the proposed scheme (one dimensional case)

网格数	$L^1$ 误差	收敛阶	$L^\infty$ 误差	收敛阶
20	1.25e-003	-	3.98e-003	-
40	8.28e-005	3.92	1.71e-004	4.54
80	5.01e-006	4.05	7.98e-006	4.42
160	3.15e-007	3.99	4.98e-007	4.00
320	1.98e-008	3.99	3.11e-008	4.00

注:“-”表示无数值。

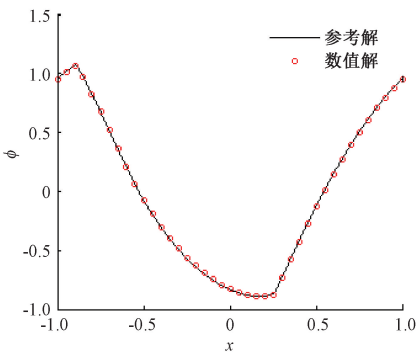
算例 2 考虑非线性方程

$$\begin{cases} \phi_t + H(\phi_x) = 0, \quad x \in [-1, 1], \\ \phi(x, 0) = -\cos(\pi x), \end{cases}$$

其中  $H$  分别取一个凸算子  $H(u) = (u + 1)^2/2$  和非凸算子  $H(u) = -\cos(u + \alpha)$ 。这两种情形都会在  $t = 1/\pi^2$  时产生奇性。采用 40 个网格点计算, 图 2 给出了  $t = 2/\pi^2$  时刻的数值结果, 其中实线是参考解, 由本文格式采用 6 400 个网格点计算得到。从图 2 中可以看出, WENO4 格式成功地捕捉到了“尖角”处。

算例 3 考虑二维线性对流方程

$$\begin{cases} \phi_t + \phi_x + \phi_y = 0, \\ \phi(x, 0) = -\cos(\pi(x + y)), \end{cases}$$



(b) 非凸H情形

图 2 算例 2 的数值结果

Figure 2 Numerical results for example 2

该方程的精确解是  $\phi(x, y, t) = -\cos(\pi(x + y - 2t))$ , 可以用来测试二维情况下格式的数值精度。采用不同网格点数计算到  $t = 1$ , 选取区域  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  上的  $L^1$  和  $L^\infty$  误差结果如表 2 所示。可以看出, 二维情形下 WENO4 格式也可以达到理论上的四阶精度。

表 2 格式的数值精度(二维情形)

Table 2 Numerical accuracy of the proposed scheme (two dimensional case)

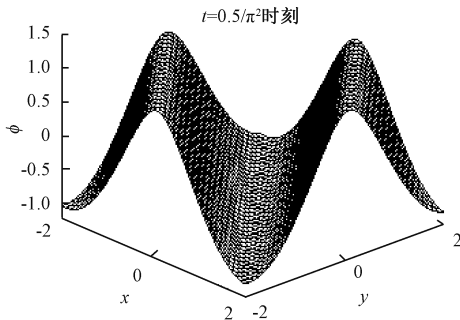
网格数	$L^1$ 误差	收敛阶	$L^\infty$ 误差	收敛阶
20	3.86e-003	-	6.09e-003	-
40	1.64e-004	4.56	2.96e-004	4.36
80	9.11e-006	4.17	1.43e-005	4.37
160	5.23e-007	4.12	8.22e-007	4.12
320	3.02e-008	4.11	4.74e-008	4.12

注:“-”表示无数值。

算例 4 考虑二维 Burgers 方程

$$\begin{cases} \phi_t + \frac{(\phi_x + \phi_y + 1)^2}{2} = 0, & (x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2], \\ \phi(x, 0) = -\cos(\pi(x + y)/2). \end{cases}$$

该问题在  $t = 0.5/\pi^2$  时刻解是光滑的, 在  $t = 1.5/\pi^2$



时刻解会产生间断的一阶导数。采用  $40 \times 40$  网格点计算, 其结果如图 3 所示。可以看出, 数值解与经典文献[4, 6, 10]的数值解相吻合。

算例 5 考虑几何光学中的 Eikonal 方程<sup>[6]</sup>

$$\begin{cases} \phi_t + \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + 1} = 0, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ \phi(x, y, 0) = \frac{1}{4}(\cos(2\pi x) - 1)(\cos(2\pi y) - 1) - 1. \end{cases}$$

采用  $40 \times 40$  网格点计算到  $t = 0.6$ , 其等势线与曲面图如图 4 所示。可以看出, WENO4 格式成功捕捉到了本问题发展成的“尖角”部分。

算例 6 考虑优化控制问题<sup>[6]</sup>

$$\begin{cases} \phi_t + (\sin y)\phi_x + (\sin x + \text{sign}(\phi_y))\phi_y - \frac{1}{2}\sin^2 y - (1 - \cos x) = 0, & (x, y) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi), \\ \phi(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

与前面算例的通量仅依赖于  $\nabla \phi$  不同, 本问题的通量还依赖于  $(x, y)$ 。经过有限时刻, 解的导数会产生间断, 最感兴趣的量是  $\omega = \text{sign}(\phi_y)$ 。采用  $40 \times 40$  网格点计算到  $t = 1$ , 图 5 给出了解  $\phi$  和  $\omega = \text{sign}(\phi_y)$  的数值计算结果, 可以看出 WENO4 格式

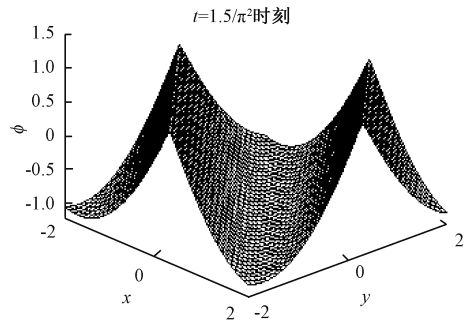


图 3 算例 4 的数值结果

Figure 3 Numerical results for example 4

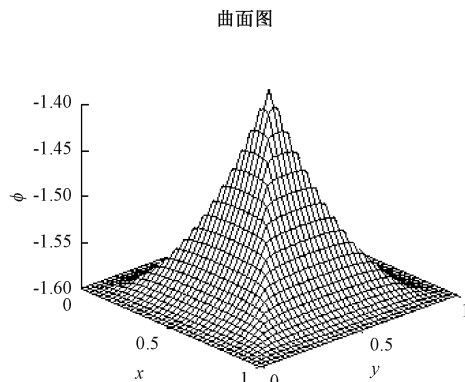
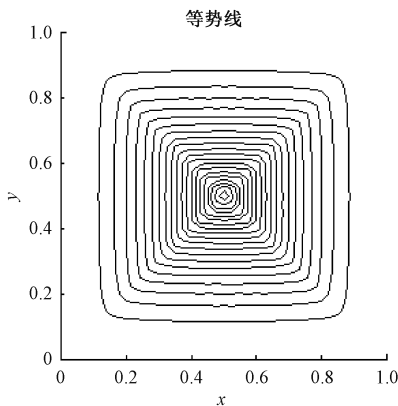


图 4 算例 5 的数值结果

Figure 4 Numerical results for example 5

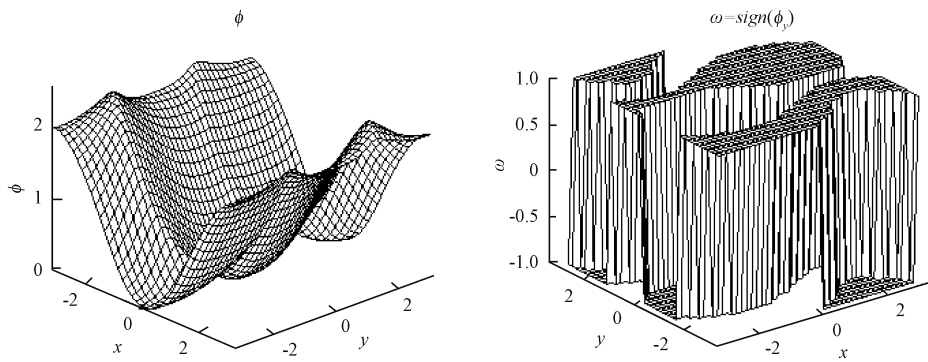


图5 算例6的数值结果

Figure 5 Numerical results for example 6

能较好分辨出解的间断导数。

### 3 结论

针对 Hamilton-Jacobi 方程,给出了一种高阶有限差分格式。该格式包括 3 个部分:四阶 WENO 重构、全局 Lax-Friedrichs 通量、三阶 Runge-Kutta 时间推进方法。与其他 WENO 方法采用  $r + 2$  个节点得到  $\phi_{x,i}^*$  的  $r$  阶近似不同,该方法采用  $r + 2$  个节点得到  $\phi_{x,i}^*$  的  $r + 1$  阶近似。一维和二维数值算例验证了该格式的四阶精度和有效性。

### 参考文献:

- [1] SHU C W. High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: a brief survey of several recent developments[J]. Journal of computational physics, 2016, 316: 598-613.
- [2] 白晓雅, 郑秋亚, 梁益华. 求解欧拉方程的嵌入 WENO 格式[J]. 郑州大学学报(理学版), 2020, 52(3): 98-103.  
BAI X Y, ZHENG Q Y, LIANG Y H. The embedded WENO scheme for solving the Euler equation[J]. Journal of Zhengzhou university (natural science edition), 2020, 52(3): 98-103.
- [3] CHENG Y D, WANG Z X. A new discontinuous Galerkin finite element method for directly solving the Hamil-

ton-Jacobi equations[J]. Journal of computational physics, 2014, 268: 134-153.

- [4] JIANG G S, PENG D P. Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations[J]. SIAM journal on scientific computing, 2000, 21(6): 2126-2143.
- [5] SERNA S, QIAN J L. Fifth-order weighted power-ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations[J]. Journal of scientific computing, 2006, 29(1): 57-81.
- [6] ZHU J, QIU J X. A new fifth order finite difference WENO scheme for Hamilton-Jacobi equations[J]. Numerical methods for partial differential equations, 2017, 33(4): 1095-1113.
- [7] HUANG C. WENO scheme with new smoothness indicator for Hamilton-Jacobi equation[J]. Applied mathematics and computation, 2016, 290: 21-32.
- [8] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of computational physics, 2008, 227(6): 3191-3211.
- [9] GOTTLIEB S, KETCHESON D I, SHU C W. High order strong stability preserving time discretizations[J]. Journal of scientific computing, 2009, 38(3): 251-289.
- [10] BRYSON S, LEVY D. High-order semi-discrete central-upwind schemes for multi-dimensional Hamilton-Jacobi equations[J]. Journal of computational physics, 2003, 189(1): 63-87.