第 44 卷第 3 期
2012 年 9 月

郑州大学学报(理学版)
J. Zhengzhou Univ. (Nat. Sci. Ed.)

Vol. 44 No. 3
Sep. 2012

DOI: 10.3969/j.issn/1671-6841.2012.03.006

关于特定幸福立方数列

韩 迪

(西北大学 数学系 陕西 西安 710127)

摘要: 针对特定幸福立方数的一些问题进行研究,并对这些问题进行推广和延伸,给出了一般特定幸福 k 次方数的结论.

关键词: 特定幸福立方数; 初等方法; 特定幸福 k 次方数

中图分类号: O 156.4　　文献标志码: A　　文章编号: 1671-6841(2012)03-0020-02

0 引言及结论

著名数论专家 Smarandache 教授在他的著作中引入不少新的数论函数、数列[1],同时也提出了未解决的问题和猜想,这些内容引起了研究者的重视和兴趣,并取得了一系列重要的研究成果[2-5].

Jebreel 教授在文献[6]中研究 Smarandache 问题时提出了特定幸福立方数的概念,即对任意正整数 n,如果 n 的各位数字的立方相加所得之值恰好等于 n,那么这个正整数 n 就称为特定幸福立方数. 例如,$1=1^3$,$153=1^3+5^3+3^3$,$370=3^3+7^3+0^3$,$371=3^3+7^3+1^3$,$407=4^3+0^3+7^3$,…. 所以 1,153,370,371,407 均为特定幸福立方数. 设 $F_3=\{1,153,370,371,407,\cdots\}$ 表示所有特定幸福立方数的集合. 那么 Jebreel 教授在文献[6]中针对这个集合也提出了下列几个需要回答的公开问题: 1) 特定幸福立方数之集合 F_3 是有限集还是无限集? 2) 如果集合 F_3 是无限集,那么 407 后紧接着的数应该是什么? 3) 集合 F_3 的密度是多少? 4) 在集合 F_3 中共有多少个素数? 5) 特定幸福立方数与幸福数、Fibonacci 数、Lucas 数及 Pell 数有什么联系? 6) 在特定幸福立方数列中,370 和 371 是连续的,那么在这个数列中是否还存在这样连续的数对?

本文利用初等方法以及不等式理论对以上 6 个问题进行研究,并给予解决. 此外,还将文献[6]中的问题推广和延伸,给出了一般特定幸福 k 次方数的结论.

为了表述方便,引入特定幸福 k 次方数的定义: 设 $k\geqslant 3$ 是一个给定的整数,对于任意正整数 n,如果 n 的十进制中各位数字的 k 次方之和恰好等于 n,那么就称这个数 n 为特定幸福 k 次方数. 若 $n=b_s b_{s-1}\cdots b_1$ 是 n 的十进制表示式且 $n=b_s^k+b_{s-1}^k+\cdots+b_2^k+b_1^k$,称 $n=b_s b_{s-1}\cdots b_1$ 是特定幸福 k 次方数. 设 $F_k=\{b_n\}$ 表示所有特定幸福 k 次方数之集合,那么有定理 1.

定理 1 设 F_3 表示特定幸福立方数列之集合,则数列 F_3 是有限集且 $F_3=\{1,153,370,371,407\}$,在这个数列中有且只有一个素数 407; 并且对任意给定的正整数 $k\geqslant 3$,集合 F_k 是有限集.

1 定理 1 的证明

利用初等方法以及不等式理论来完成定理 1 的证明. 本文中所使用的初等数论知识参见文献[7-8]. 设 A_s 是特定幸福立方数列 $\{a_n\}$ 中的一个元素. 假定 A_s 的十进制表示式为 $a_s a_{s-1}\cdots a_2 a_1$,其中 $1\leqslant a_s\leqslant 9$,$0\leqslant a_1,a_2,\cdots,a_{s-1}\leqslant 9$. 于是由特定幸福立方数的定义有

$$A_s=a_s a_{s-1}\cdots a_2 a_1=a_s^3+a_{s-1}^3+\cdots+a_2^3+a_1^3. \tag{1}$$

显然由(1)式可以推出不等式

收稿日期: 2011-11-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目,编号 11071194; 陕西省教育厅科研计划项目,编号 2010JK802; 西安医学院科研基金资助项目,编号 10FC027.
作者简介: 韩迪(1989-),女,硕士研究生,主要从事数论研究,E-mail: hd41189@163.com.

$$10^{s-1} \leqslant a_s a_{s-1} \cdots a_2 a_1 = A_s = a_s^3 + a_{s-1}^3 + \cdots + a_2^3 + a_1^3 \leqslant 9^3 \times s. \tag{2}$$

即 s 必须满足不等式 $10^{s-1} \leqslant 9^3 \times s$. 设函数 $f(s) = 10^{s-1} - 729s$，则 $f'(s) = 10^{s-1} \times \ln 10 - 729$，当 $s \geqslant 5$ 时，显然有 $f'(s) \geqslant 10^4 \ln 10 - 729 > 0$，所以当 $s \geqslant 5$ 时，$f(s)$ 为递增函数且 $f(5) = 10^4 - 5 \times 729 = 6\,355 > 0$，故由单调递增函数的性质可知，对所有 $s \geqslant 5$，有不等式 $f(s) > 0$. 从而对所有整数 $s \geqslant 5$，有不等式 $10^{s-1} > 9^3 \times s$. 这显然与不等式(2)矛盾. 所以要使不等式(2)成立，必须有 $s \leqslant 4$. 下面分别讨论 $s = 1,2,3,4$.

当 $s = 4$ 时，令 $A_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$，并且有 $1 \leqslant a_1 \leqslant 9, 0 \leqslant a_2, a_3, a_4 \leqslant 9$. 由 A_4 的取值范围为 $1\,000 \leqslant A_4 \leqslant 2\,916$，推出 $a_1 = 1$ 或者 $a_1 = 2$. 这时，用计算机编程来验证是否存在这样的 A_4，最终答案是否定的.

当然，也可直接证明 4 位数中没有特定幸福立方数. 事实上当 $a_1 = 2$ 时，$\max A_4 \leqslant 9^3 \times 3 + 2^3 = 2\,195$. 则 $2\,000 \leqslant A_4 \leqslant 2\,195$. 从不等式可以看出 $a_2 = 0$ 或者 $a_2 = 1$.

(i) 当 $a_2 = 0$ 时，$A_4 \leqslant 9^3 \times 2 + 2^3 = 1\,466$. 不在 A_4 的取值范围内，故不成立;

(ii) 当 $a_2 = 1$ 时，$A_4 \leqslant 9^3 \times 2 + 2^3 + 1 = 1\,467$. 也不在 A_4 的取值范围内，故不成立.

因此，得出当 $a_1 = 2$ 时，即首位是 2 的 4 位数中没有特定幸福立方数.

当 $a_1 = 1$ 时，$\max A_4 \leqslant 9^3 \times 3 + 1 = 2\,188$，则 $1\,000 \leqslant A_4 \leqslant 1\,999$. 从不等式可以看出 $0 \leqslant a_2 \leqslant 9$.

当 $a_2 = 0$ 时，也就是 $a_1 = 1, a_2 = 0$，$\max a_4 \leqslant 9$. 现考虑 a_3 的取值范围，从而得出不等式方程 $1^3 + 0^3 + a_3^3 + 9^3 \geqslant 1\,000$，解不等式可得 $a_3 \geqslant 7$.

当 $a_3 = 7$ 时，$A_4 \leqslant 1^3 + 0^3 + 7^3 + 9^3 = 1\,073$. 那么，在此基础上再考虑 a_4 的取值范围，$1^3 + 0^3 + 7^3 + a_4^3 \geqslant 1\,070$，解不等式可得 $a_4 \geqslant 9$. 则此时 $A_4 = 1^3 + 0^3 + 7^3 + 9^3 = 1\,073 \neq 1\,079$. 故不成立.

当 $a_3 = 8$ 时，$A_4 \leqslant 1^3 + 0^3 + 8^3 + 9^3 = 1\,242$. 同样，考虑 a_4 的取值范围，$1^3 + 0^3 + 8^3 + a_4^3 \geqslant 1\,080$，解得 $a_4 \geqslant 9$. 而 $A_4 = 1^3 + 0^3 + 8^3 + 9^3 = 1\,242 \neq 1\,089$. 故不成立.

当 $a_3 = 9$ 时，$A_4 = 1^3 + 0^3 + 9^3 \times 2 = 1\,459$. 相同的，考虑 a_4 的取值范围，$1^3 + 0^3 + 9^3 + a_4^3 \geqslant 1\,090$，解不等式得 $a_4 \geqslant 8$. 于是，当 $a_4 = 8$ 时，$A_4 = 1^3 + 0^3 + 9^3 + 8^3 = 1\,242 \neq 1\,098$. 当 $a_4 = 9$ 时，$A_4 = 1^3 + 0^3 + 9^3 \times 2 = 1\,459 \neq 1\,099$. 可以看到 $a_3 = 9$ 时没有特定幸福立方数.

用同样的方法可以讨论 $a_2 = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 时的情况，在此不作详细陈述. 通过讨论发现首位为 1 的 4 位数中没有固定幸福立方数.

类似的，可以讨论 $s = 3,2,1$ 的情况，不难推出 $F_3 = \{1,153,370,371,407\}$. 从而证明了特定幸福立方数列是有限的，确切地说 F_3 包含 5 个元素，且在这 5 个数中，只有 407 一个素数.

下面证明定理的后半部分，由特定幸福 k 次方数的定义，如果 $B_n \in F_k$，那么 $B_n = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n = b_1^k + b_2^k + \cdots + b_n^k$，其中 $1 \leqslant b_1 \leqslant 9, 0 \leqslant b_2, b_3, \cdots, b_n \leqslant 9$. 由此推出不等式 $10^{n-1} \leqslant B_n \leqslant 9^k \times n$. 即 n 必须满足 $10^{n-1} \leqslant 9^k \times n$. 然而由高等数学中递增函数的定义及性质推出函数 $g(x) = 10^{n-1} - 9^k \times x$，当 x 较大时为递增函数，所以当 x 充分大时有 $g(x) > 0$. 显然这与不等式(2)矛盾. 所以使得不等式(2)成立的正整数 n 一定是有界的，也就是说满足不等式 $10^{n-1} \leqslant 9^k \times n$ 的正整数 n 最多有有限个.

因此，特定幸福 k 次方数之集合是有限的，定理 1 得证.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Liu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76 – 79.

[3] 张沛. 一个包含伪 Smarandache 无平方因子函数的方程 [J]. 郑州大学学报: 理学版, 2008, 40(2): 36 – 38.

[4] 李玲，姚维利. 一个包含 Smarandache 函数与伪 Smarandache 函数的方程及其正整数解 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2010, 33(2): 200 – 202.

[5] 蔡立翔. 一个包含数论函数的方程及其正整数解 [J]. 郑州大学学报: 理学版, 2008, 40(2): 33 – 35.

[6] Muneer Jebreel. Smarandache sequence of happy cube numbers [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14(1), 139 – 140.

[7] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[8] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

(下转第 25 页)

[2] 李国平,郭友中,陈银通. 自守函数和闵可夫斯基函数[M]. 北京:科学出版社,1979:8-57.
[3] 路见可,钟寿国,刘士强. 复变函数[M]. 武汉:武汉大学出版社,2009:116-155.
[4] 华罗庚,万哲先. 典型群[M]. 上海:上海科技出版社,1963:189-234.
[5] 张远达. 有限群的构造[M]. 上海:上海科技出版社,1987.
[6] 李尚志. 典型群的子群结构[M]. 上海:上海科技出版社,1998.
[7] 赵文强,李嘉. Markov积分半群的生成元[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2007,32(5):14-17.
[8] 游兴中. $GL(n,Q)$的有限群的阶的一个注记[J]. 四川大学学报:自然科学版,2008,45(3):475-477.
[9] 王存才,张洪,钟祥贵. Deskins的指数复合与有限群的可解性[J]. 广西师范大学学报:自然科学版,2010,28(1):16-20.
[10] 钟祥贵,张洪,何家文. 子群与有限群的超可解性[J]. 广西师范大学学报:自然科学版,2010,28(2):268-273.

Determing the Cyclic Group of Order *n* in Möbius Transformation

GAN Xin-rong[1], ZHONG Shou-guo[2]
(1. *College of Sciences*, *Wuhan University of Science and Technology*, *Wuhan* 430065, *China*;
2. *School of Mathematics and Statistics*, *Wuhan University*, *Wuhan* 430072, *China*)

Abstract: By replacing iterative computation in Möbius transformation (MT) with computation of powers of 2×2 square matrix, and by using two constants Δ and δ as well as two seguences Δ_n, δ_n related to Δ, δ, a formula of the n^{th} of a 2×2 square matrix was proved in terms of Δ_n and δ_n, and a criterion of MT being a cyclic group of order n was given.

Key words: Möbius transformation; square matrix; cyclic mapping

(上接第21页)

On the Sequence of Fixed Happy Cube Numbers

HAN Di
(*Department of Mathematics*, *Northwest University*, *Xi'an* 710127, *China*)

Abstract: With certain elementary method and theory of inequality, a series of problems for the fixed happy cube numbers were studied. The definition of the fixed happy k-th numbers was extended, and a general conclusion was drawn.

Key words: fixed happy cube number; elementary method; fixed happy k-th number.