第 44 卷第 2 期　　郑州大学学报(理学版)　　Vol. 44 No. 2
2012 年 6 月　　J. Zhengzhou Univ. (Nat. Sci. Ed.)　　Jun. 2012

DOI: 10.3969/j.issn/1671-6841.2012.02.006

一类广义 BBM-Burgers 方程的 Cauchy 问题

张能伟[1]， 陈翔英[2]

(1. 安阳师范学院 数学与统计学院　河南 安阳 455002;
2. 郑州电力高等专科学校 经济贸易系　河南 郑州 450004)

摘要: 证明了广义 BBM-Burgers 方程的 Cauchy 问题

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} + \gamma v_{xxxx} + f(v)_x = G(v) + h(v_x)_x + g(v)_{xx}, x \in \mathbf{R}, t > 0,$$
$$v(x,0) = v_0(x), x \in \mathbf{R}$$

存在唯一整体强解 $v \in C([0,\infty); H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2}(\mathbf{R}))\ (s \geqslant 4)$ 和唯一的整体古典解,并给出解的衰减估计.

关键词: 广义 BBM-Burgers 方程; Cauchy 问题; 整体解; 解的衰减估计
中图分类号: O 175.29; O 175.26　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1671-6841(2012)02-0024-07

0 引言

文[1]研究了具有耗散项的多维广义 BBM-Burgers 方程组 Cauchy 问题

$$u_t + \sum_{j=1}^{N} f_j(u)_{x_j} - \Delta u_t - \Delta u + \Delta^2 u = 0, x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbf{R}^N \tag{2}$$

解的最优瞬间衰减估计,其中,$u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))^{\mathrm{T}}$ 是未知向量值函数,$f_j(u) = (f_{j1}(u), \cdots, f_{jn}(u))^{\mathrm{T}}(j = 1,2,\cdots,N)$ 是定义在 $\overline{B}_l(\overline{u})$ ($\overline{B}_l(\overline{u})$ 是以某一固定点 $\overline{u} \in \mathbf{R}^n$ 为球心,l 为半径的闭球,而 $l > 0$ 为任意固定常数) 上的任意 $n \times 1$ 光滑向量值流量函数.

文[2]证明了具有耗散项的一维广义 BBM-Burgers 方程组 Cauchy 问题

$$u_t + f(u)_x - \alpha u_{xxt} - \beta u_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbf{R} \tag{4}$$

整体光滑解的存在性和收敛性,其中,$\alpha, \beta, \gamma > 0$ 为常数,$u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))^{\mathrm{T}}$ 和 $f(u) = (f_1(u), \cdots, f_n(u))^{\mathrm{T}}$ 为光滑向量值函数. 文[3]研究了多维的 Cauchy 问题(3),(4)整体光滑解的存在性和收敛性,所得结果推广了 Cauchy 问题(3),(4)的结果.

作者研究下列广义 BBM-Burgers 方程的 Cauchy 问题

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} + \gamma v_{xxxx} + f(v)_x = G(v) + h(v_x)_x + g(v)_{xx}, x \in \mathbf{R}, t > 0, \tag{5}$$

$$v(x,0) = v_0(x), x \in \mathbf{R}, \tag{6}$$

其中,$v(x,t)$ 表示未知函数,$v_x = \dfrac{\partial v}{\partial x}, v_t = \dfrac{\partial v}{\partial t}$ 等,$\alpha, \beta, \gamma > 0$ 为常数,$f(s), h(s), G(s)$ 和 $g(s)$ 为给定的非线性函数,$v_0(x)$ 是定义在 R 上的已知初值函数.

作者采用以下记号: $L^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 表示所有定义在 R 上 L^p 可积函数的空间,并赋予范数 $\|\cdot\|_{L^p} = \|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|$; $H^s(\mathbf{R})$ 表示 R 上的 Sobolev 空间,赋予范数 $\|u\|_{H^s(\mathbf{R})} = \|(I - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}} u\| =$

收稿日期: 2011-12-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目,编号 10971199,11171311;河南省教育厅自然科学基金资助项目,编号 2009C110006.
作者简介: 张能伟(1980-),男,硕士,主要从事偏微分方程研究,E-mail: zhang_nw@163.com; 通讯作者: 陈翔英(1968-),女,副教授,硕士,主要从事偏微分方程研究,E-mail: chenxiangying@126.com.

$\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}\|$,其中,$s\in\mathbf{R}$,$\partial_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$,$I$ 是单位算子,$\hat{u}$ 表示 $u(x,t)$ 对 x 的 Fourier 变换.

1 Cauchy 问题(5),(6) 局部解的存在性和唯一性

为了讨论方便起见,对方程(5) 和初值条件作尺度变换

$$v(x,t)=u\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}},\frac{\alpha^2}{\gamma}t\right),\tag{7}$$

于是方程变为

$$u_t-u_{xxt}-u_{xx}+u_{xxxx}+\frac{\sqrt{\alpha}\alpha}{\gamma}f(u)_x=\frac{\sqrt{\alpha}\alpha}{\gamma}h\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x+\frac{\alpha^2}{\gamma}G(u)+\left[\frac{\alpha}{\gamma}g(u)+\frac{\alpha\beta}{\gamma}u-u\right]_{xx},\tag{8}$$

而初值变为 $u_0(x)=v_0(\sqrt{\alpha}x)$. 若令

$$\frac{\sqrt{\alpha}\alpha}{\gamma}f(u)_x=f(u)_x;\ \frac{\sqrt{\alpha}\alpha}{\gamma}h\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}u_x\right)_x=h(u_x)_x;$$

$$\frac{\alpha^2}{\gamma}G(u)=G(u);\ \frac{\alpha}{\gamma}g(u)+\frac{\alpha\beta}{\gamma}u-u=g(u),$$

则 Cauchy 问题(5),(6) 变为

$$u_t-u_{xxt}-u_{xx}+u_{xxxx}+f(u)_x=G(u)+h(u_x)_x+g(u)_{xx},x\in\mathbf{R},\ t>0,\tag{9}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\mathbf{R}.\tag{10}$$

所以作者只需研究 Cauchy 问题(9),(10) 整体强解和整体古典解的存在性、唯一性和解的衰减性质,因为通过变换(7) 可得 Cauchy 问题(5),(6) 的结果.

为了将 Cauchy 问题(9),(10) 转化为积分方程,引入常微分方程的基本解和几个引理. 令 $F(x)$ 是常微分方程

$$w(x)-w_{xx}(x)=\delta(x)\tag{11}$$

的基本解,其中,$\delta(x)$ 为 Dirac 函数,即 $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$,$x\in\mathbf{R}$. 易证基本解满足下面的引理.

引理 1 ① $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有意义、连续且 $F(x)>0$;

② $F(x)\in L^q$,其中,$1\leqslant q\leqslant\infty$ 且 $\|F\|_1=1$;

③ $\hat{F}(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi^2}$,其中,$\hat{F}(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x$ 是 $F(x)$ 的 Fourier 变换;

④ $\|F*f\|_{H^s(\mathbf{R})}=\|f\|_{H^{s-2}(\mathbf{R})}$,$\forall s\in\mathbf{R}$,其中,$F*f(x)$ 表示函数 F 和 f 的卷积.

引理 2[4] 假设 $f(u)\in C^k(\mathbf{R})$,$f(0)=0$,$u\in L^\infty\cap H^s(\mathbf{R})$ 且 $k=[s]+1$,$s\geqslant 0$. 如果 $\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\leqslant M$,则

$$\|f(u)\|_{H^s(\mathbf{R})}\leqslant C_1(M)\|u\|_{H^s(\mathbf{R})},$$

其中,$C_1(M)$ 是依赖于 M 的常数.

引理 3[5] 假设 $s\geqslant 0$,$f(u)\in C^k(\mathbf{R})$ $(k=[s]+1)$,$u,v\in L^\infty\cap H^s(\mathbf{R})$,如果 $\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R})}+\|u\|_{H^s(\mathbf{R})}\leqslant M$,$\|v\|_{L^\infty(\mathbf{R})}+\|v\|_{H^s(\mathbf{R})}\leqslant M$,则

$$\|f(u)-f(v)\|_{H^s(\mathbf{R})}\leqslant C_2(M)\|u-v\|_{H^s(\mathbf{R})},$$

其中,$C_2(M)$ 是依赖于 M 的常数.

设 $u(x,t)\in C^1([0,T];H^s(\mathbf{R}))$ $(s\geqslant 4)$ 是问题(9),(10) 的强解,则方程(9) 可写为

$$u_t-u_{xx}-[u_t-u_{xx}]_{xx}+f(u)_x=G(u)+h(u_x)_x+g(u)_{xx}.\tag{12}$$

令 $f(0)=h(0)=g(0)=G(0)=0$,由方程(12) 和基本解 $F(x)$ 可知

$$u_t-u_{xx}=(I-\partial_x^2)^{-1}[G(u)+h(u_x)_x-f(u)_x+g(u)_{xx}]$$

$$=F*[G(u)+h(u_x)_x-f(u)_x+g(u)_{xx}].\tag{13}$$

定义 1 对于任意 $T>0$,如果 $s\geqslant 2$,函数 $u(x,t)\in C([0,T);H^s(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T);H^{s-2}(\mathbf{R}))$ 是问题

(13),(10)的解,则称$u(x,t)$是问题(9),(10)的强解. 如果$T<\infty$,则称$u(x,t)$为问题(9),(10)的局部强解;如果$T=\infty$,则称$u(x,t)$为问题(9),(10)的整体强解.

为了应用压缩映射原理证明问题(13),(10)存在唯一的整体解,首先考虑下列线性方程的 Cauchy 问题

$$u_t-u_{xx}=\varphi(x,t),\ (x,t)\in\mathbf{R}\times[0,T],\tag{14}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\mathbf{R}.\tag{15}$$

引理4 令$s\in\mathbf{R}$. 设对任意的$T>0$,$u_0\in H^s(\mathbf{R})$,$\varphi\in L^1([0,T];H^s(\mathbf{R}))$,则问题(14),(15)存在唯一强解$u(x,t)\in C([0,T];H^s(\mathbf{R}))$且有估计

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})}\leqslant\|u_0\|_{H^s(\mathbf{R})}+\int_0^t\|\varphi(\cdot,\tau)\|_{H^s(\mathbf{R})}\mathrm{d}\tau,\ t\in[0,T].\tag{16}$$

证明 类似于文献[6],证明波动方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt}-u_{xx}=\varphi(x,t),\ (x,t)\in\mathbf{R}\times[0,T],$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ x\in\mathbf{R}$$

解的存在唯一性,可以证明问题(14),(15)存在唯一的强解$u(x,t)\in C([0,T];H^s(\mathbf{R}))$. 下面证明估计式(16)成立. 方程(14)两边作 Fourier 变换,有

$$\hat{u}_t+\xi^2\hat{u}=\hat{\varphi}(\xi,t).\tag{17}$$

(17)式两端同时乘以e^{ξ^2t},得$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{u}\mathrm{e}^{\xi^2t})=\hat{\varphi}(\xi,t)\mathrm{e}^{\xi^2t}$,从0到$t$积分可知

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{u}_0\mathrm{e}^{-\xi^2t}+\int_0^t\mathrm{e}^{-\xi^2(t-\tau)}\hat{\varphi}(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{18}$$

其中,$\hat{u}_0$是$u_0(x)$的 Fourier 变换. 因为$\mathrm{e}^{-\xi^2t}\leqslant1$,由(18)式得

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})}\leqslant\|u_0\|_{H^s(\mathbf{R})}+\int_0^t\|\varphi(\cdot,\tau)\|_{H^s(\mathbf{R})}\mathrm{d}\tau.\tag{19}$$

引理证毕.

对于$s\geqslant2$,$u_0\in H^s(\mathbf{R})$,定义函数空间$X(T)=\{w\mid w\in C([0,T];H^s(\mathbf{R}))\}$,其范数定义为

$$\|w\|_{X(T)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})},\ w\in X(T).$$

显然$X(T)$是一个 Banach 空间. 对于任意$M,T>0$,定义集合

$$P(M,T)=\{w\mid w\in X(T),\ \|w\|_{X(T)}\leqslant M\},$$

显然$P(M,T)$是$X(T)$中一不空有界闭凸集,对于$w\in X(T)$,$u_0\in H^s(\mathbf{R})$,$g,f,h,G\in C^k(\mathbf{R})$且$k=[s]+1$,考虑下列线性方程的 Cauchy 问题

$$u_t-u_{xx}=F^*[G(w)+h(w_x)_x-f(w)_x+g(w)_{xx}],\ x\in\mathbf{R},\ t>0,\tag{20}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\mathbf{R}.\tag{21}$$

令S表示由w到问题(20),(21)的唯一解的映射,由引理4知,S映$X(T)$到$X(T)$.

定理1 设$u_0\in H^s(\mathbf{R})(s\geqslant2)$,$g,f,h,G\in C^k(\mathbf{R})$,$f(0)=g(0)=h(0)=G(0)=0$且$k=[s]+1$. 如果$T$相对于$M$充分小,则$S:P(M,T)\to P(M,T)$是严格压缩的.

证明 当$s\geqslant2$时,由 Sobolev 嵌入定理推得

$$\|w\|_{C_B^1(\mathbf{R})}\leqslant C_3\|w\|_{H^s(\mathbf{R})},$$

其中,$C_B^1(\mathbf{R})$是由定义在$\mathbf{R}$上的连续函数和一阶有界连续导数全体组成的空间且C_3是一嵌入常数. 令$\tilde{\varphi}=F^*[G(w)+h(w_x)_x-f(w)_x+g(w)_{xx}]$.

由引理1和引理2得

$$\begin{aligned}\|\tilde{\varphi}\|_{H^s(\mathbf{R})}\leqslant&\|(I-\partial_x^2)^{-1}[h(w_x)_x-f(w)_x]\|_{H^s(\mathbf{R})}+\|(I-\partial_x^2)^{-1}G(w)\|_{H^s(\mathbf{R})}+\\&\|(I-\partial_x^2)^{-1}g(w)_{xx}\|_{H^s(\mathbf{R})}\\=&\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}(1+\xi^2)^{-1}(-\mathrm{i}\xi)(\widehat{h(w_x)}-\widehat{f(w)})\|+\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}(1+\xi^2)^{-1}\widehat{G(w)}\|+\\&\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}(1+\xi^2)^{-1}(-\xi^2)\widehat{g(w)}\|\\\leqslant&C_1(\bar{M})(\|w\|_{H^{s-1}(\mathbf{R})}+\|w_x\|_{H^{s-1}(\mathbf{R})}+\|w\|_{H^{s-2}(\mathbf{R})}+\|w\|_{H^s(\mathbf{R})})\end{aligned}$$

$$\leqslant 4C_1(\bar{M})\ \|w\|_{H^s(\mathbf{R})}, \tag{22}$$

其中,$\bar{M} = C_3 M$. 故

$$\int_0^t \|\tilde{\varphi}\|_{H^s(\mathbf{R})}\mathrm{d}\tau \leqslant 4C_1\bar{M}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|w\|_{H^s(\mathbf{R})}T.$$

所以由引理 4 知

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})} \leqslant \|u_0\|_{H^s(\mathbf{R})} + 4C_1(\bar{M})MT. \tag{23}$$

如果 M 和 T 满足

$$2\|u_0\|_{H^s(\mathbf{R})} \leqslant M,\ T \leqslant \frac{1}{8C_1(\bar{M})}, \tag{24}$$

则由(23) 式推出 $\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})} \leqslant M$. 因此,如果(24) 式成立,则 S 映 $P(M,T)$ 到 $P(M,T)$. 下证 $S: P(M,T) \to P(M,T)$ 是严格压缩的.

给定 $w_1, w_2 \in P(M,T)$. 令 $u_1 = Sw_1, u_2 = Sw_2, u = u_1 - u_2, w = w_1 - w_2$,则 $u(x,t)$ 满足下列 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} = F^*\,[&G(w_1) - G(w_2) + h(w_{1x})_x - h(w_{2x})_x - \\ &(f(w_1)_x - f(w_2)_x) + g(w_1)_{xx} - g(w_2)_{xx}],\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \end{aligned} \tag{25}$$

$$u(x,0) = 0,\ x \in \mathbf{R}. \tag{26}$$

由引理 1 和引理 3 推出

$$\begin{aligned} \|F^*\,[f(w_1)_x - f(w_2)_x]\|_{H^s(\mathbf{R})} &\leqslant \|f(w_1) - f(w_2)]\|_{H^{s-1}(\mathbf{R})} \\ &\leqslant C_2(\bar{M})\ \|w\|_{H^{s-1}(\mathbf{R})} \\ &\leqslant C_2(\bar{M})\ \|w\|_{H^s(\mathbf{R})}. \end{aligned} \tag{27}$$

类似可知

$$\|F^*\,[h(w_{1x}) - h(w_{2x})]\|_{H^s(\mathbf{R})} \leqslant C_2(\bar{M})\ \|w\|_{H^s(\mathbf{R})}, \tag{28}$$

$$\|F^*\,[g(w_1)_{xx} - g(w_2)_{xx}]\|_{H^s(\mathbf{R})} \leqslant C_2(\bar{M})\ \|w\|_{H^s(\mathbf{R})}, \tag{29}$$

$$\|F^*\,[G(w_1) - G(w_2)]\|_{H^s(\mathbf{R})} \leqslant C_2(\bar{M})\ \|w\|_{H^s(\mathbf{R})}. \tag{30}$$

所以由引理 4 和(27) ~ (30) 式有

$$\|u\|_{X(T)} \leqslant 4C_2(\bar{M})\,T\,\|w\|_{X(T)}. \tag{31}$$

如果 T 满足(24) 式和

$$T \leqslant \frac{1}{8C_2(\bar{M})}, \tag{32}$$

则由(31) 式得 $\|u\|_{X(T)} \leqslant \frac{1}{2}\|w\|_{X(T)}$. 定理证毕.

定理 2　设 $u_0 \in H^s(\mathbf{R})\ (s \geqslant 2)$, $g,f,h,G \in C^k(\mathbf{R})$, $f(0) = g(0) = h(0) = G(0) = 0$ 且 $k = [s] + 1$,则 Cauchy 问题(9),(10) 存在唯一的局部强解 $u(x,t) \in C([0,T_0); H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0,T_0); H^{s-2}(\mathbf{R}))$,其中,$[0,T_0)$ 是解存在的最大时间区间,同时如果

$$\sup_{0\leqslant t<T_0}\|u\|_{H^s(\mathbf{R})} < \infty, \tag{33}$$

则 $T_0 = \infty$.

证明　由定理 1 和压缩映射原理知,对于适当选择的 $T > 0$,S 有唯一不动点 $u(x,t) \in P(M,T)$,显然它是问题(9),(10) 的局部广义解,易证对于每一 $T' > 0$,问题(9),(10) 至多有一解 $u \in X(T')$.

下面证明 $u \in C^1([0,T_0); H^{s-2}(\mathbf{R}))$. 由方程(13) 和引理 1,2 推出

$$\begin{aligned} \|u_t(\cdot,t)\|_{H^{s-2}(\mathbf{R})} \leqslant\ &\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})} + \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-2}{2}}\frac{1}{1+|\xi|^2}\widehat{G(u)}\right\| + \\ &\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-2}{2}}\frac{1}{1+|\xi|^2}(-\mathrm{i}\xi)\,\widehat{h(u_x)}\right\| + \end{aligned}$$

$$\left\| (1+|\xi|^2)^{\frac{s-2}{2}} \frac{1}{1+|\xi|^2}(-\mathrm{i}\xi)\widehat{f(u)} \right\| +$$

$$\left\| (1+|\xi|^2)^{\frac{s-2}{2}} \frac{1}{1+|\xi|^2}(-|\xi|^2)^2\widehat{g(u)} \right\|$$

$$\leqslant \|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})} + C_1(\bar{M})\|u(\cdot,t)\|_{H^{s-4}(\mathbf{R})} + C_1(\bar{M})\|u(\cdot,t)\|_{H^{s-2}(\mathbf{R})} +$$
$$C_1(\bar{M})\|u(\cdot,t)\|_{H^{s-3}(\mathbf{R})} + C_1(\bar{M})\|u(\cdot,t)\|_{H^{s-2}(\mathbf{R})}$$
$$\leqslant C_4(\bar{M})\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})}.$$

所以Cauchy问题(9),(10)存在唯一强解$u\in C([0,T_0);H^s(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T_0);H^{s-2}(\mathbf{R}))$.

令$[0,T_0)$是解$u\in X(T_0)$存在的最大时间区间,利用文献[7]中的标准方法可证如果(33)式成立,则$T_0=\infty$.定理证毕.

下面将解的延拓条件(33)转化为以下定理3中的(34)式.

定理3 设$u_0\in H^s(\mathbf{R})(s\geqslant 2)$,$g,f,h,G\in C^k(\mathbf{R})$,$f(0)=g(0)=h(0)=G(0)=0$且$k=[s]+1$,又设$[0,T_0)$是问题(9),(10)解$u(x,t)$存在的最大时间区间,如果

$$\lambda=\sup_{0\leqslant t<T_0}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}<\infty, \tag{34}$$

则$T_0=\infty$.

证明 由(34)式可知$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}<\lambda$,$t\in[0,T_0)$.令

$$\tilde{\varphi}=F^*[G(u)+h(u_x)_x-f(u)_x+g(u)_{xx}].$$

由引理1和引理2得

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^s(\mathbf{R})}=\|F^*[G(u)+h(u_x)_x-f(u)_x+g(u)_{xx}]\|_{H^s(\mathbf{R})}$$
$$\leqslant C_1(\lambda)\|u\|_{H^{s-2}(\mathbf{R})}+C_1(\lambda)\|u_x\|_{H^{s-1}(\mathbf{R})}+C_1(\lambda)\|u\|_{H^{s-1}(\mathbf{R})}+C_1(\lambda)\|u\|_{H^s(\mathbf{R})}$$
$$\leqslant 4C_1(\lambda)\|u\|_{H^s(\mathbf{R})}=C_5(\lambda)\|u\|_{H^s(\mathbf{R})}.$$

由引理4推出

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})}\leqslant\|u_0\|_{H^s(\mathbf{R})}+C_5(\lambda)\int_0^t\|u(\cdot,\tau)\|_{H^s(\mathbf{R})}\mathrm{d}\tau.$$

利用Gronwall不等式给出$\sup\limits_{0\leqslant t<T_0}\|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbf{R})}<\infty$.由定理2知$T_0=\infty$.定理证毕.

2 Cauchy问题(9),(10)的整体解

为了证明问题(9),(10)存在唯一的整体强解和整体古典解,先引入下面一个有用的引理.

引理5[8] 设$s=m+\frac{1}{2}+\lambda$,$\lambda\in(0,1)$,$m\in\mathbf{N}$($\mathbf{N}$是一个非负整数集合),则$H^s(\mathbf{R})$嵌入$C^{m,\lambda}(\mathbf{R})$和对于任意$w\in H^s(\mathbf{R})$有

$$|D^k w(x)|\to 0(|x|\to\infty),\ \forall k\in\mathbf{N},\ 0\leqslant k\leqslant m,$$

其中,$C^{m,\lambda}(\mathbf{R})$表示Hölder空间和$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

定理4 设$u_0\in H^s(\mathbf{R})(s\geqslant 4)$,$g,f,h,G\in C^k(\mathbf{R})$且$k=[s]+1$,$h(0)=0$且$h'(z)\geqslant 0$,$\forall z\in\mathbf{R}$;$Q(u)=\int_0^u f(z)\mathrm{d}z$;$\forall z\in\mathbf{R}$,$g'(z)\geqslant 0$;$G(0)=0$且存在常数$\gamma_0>0$,使得$\forall z\in\mathbf{R}$成立$G'(z)\leqslant-\gamma_0$.则Cauchy问题(9),(10)有唯一的整体强解$u(x,t)\in C([0,\infty);H^s(\mathbf{R}))\cap C^1([0,\infty);H^{s-2}(\mathbf{R}))$.

证明 根据定理3,只需证明(34)式成立即可.

方程(9)两端同乘以$2u$,并在$\mathbf{R}$上积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2+\|u_x\|^2)+2\|u_x\|^2+2\|u_{xx}\|^2=2(-f(u)_x+h(u_x)_x+G(u)+g(u)_{xx},u), \tag{35}$$

其中,$(\cdot,\cdot)$表示$L^2(\mathbf{R})$中的内积.

利用引理 5 和中值定理有

$$(-f(u)_x, u) = (f(u), u_x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial Q(u)}{\partial x} \mathrm{d}x = 0, \tag{36}$$

$$(h(u_x)_x, u) = -(h'(\theta_1 u_x) u_x, u_x) \leqslant 0, \tag{37}$$

$$(g(u)_{xx}, u) = -(g'(u) u_x, u_x) \leqslant 0, \tag{38}$$

$$(G(u), u) = (G'(\theta_2 u) u, u) \leqslant \gamma_0 \| u \|^2, \tag{39}$$

其中，$0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. 将(36) ~ (39) 式代入(35) 式后，对 t 积分可得

$$\| u(\cdot, t) \|^2 + \| u_x(\cdot, t) \|^2 + 2\int_0^t (\| u_x(\cdot, \tau) \|^2 + \| u_{x^2}(\cdot, \tau) \|^2) \mathrm{d}\tau \leqslant \| u_0 \|^2_{H^1(\mathbf{R})} + \gamma_0 \int_0^t \| u(\cdot, t) \| \mathrm{d}\tau.$$

利用 Gronwall 不等式有 $\| u(\cdot, t) \|^2_{H^1(\mathbf{R})} \leqslant \| u_0 \|^2_{H^1(\mathbf{R})} \mathrm{e}^{\gamma_0 t}, 0 \leqslant t \leqslant T.$

由嵌入定理可得 $\sup_{t \in [0, T_0)} \| u \|_{L^\infty(\mathbf{R})} < \infty$. 定理证毕.

注 1　如果 $s > \frac{9}{2}$，则 Cauchy 问题(9)，(10) 存在唯一整体古典解 $u(x, t) \in C([0, \infty); C_B^4(\mathbf{R})) \cap C^1([0, \infty); C_B^2(\mathbf{R}))$.

3　Cauchy 问题(9)，(10) 解的衰减性质

定理 5　设以下条件成立：

① $f \in C^1(\mathbf{R}), Q(u) = \int_0^u f(z) \mathrm{d}z$;

② $G \in C^1(\mathbf{R}), G(0) = 0$ 且存在常数 $\gamma_0 > 0$，使得 $\forall z \in \mathbf{R}$ 成立 $G'(z) \leqslant -\gamma_0$;

③$_1$ $h \in C^1(\mathbf{R}), \forall z \in \mathbf{R}, h(z) z \geqslant 0$;

③$_2$ $h \in C^1(\mathbf{R}), h(0) = 0$，存在常数 $\alpha_0 > 0$，使得 $\forall z \in \mathbf{R}$ 成立 $h'(z) \geqslant \alpha_0$;

④ $g \in C^2(\mathbf{R})$，存在常数 $\beta_0 > 0$，使得 $\forall z \in \mathbf{R}$ 成立 $g'(z) \geqslant \beta_0$.

如果条件 ①，②，③$_1$ 和 ④ 成立，$\min(\gamma_0, 1 + \beta_0) = \sigma_0$，则 Cauchy 问题(9)，(10) 的整体强解 $u \in C([0, \infty); H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0, \infty); H^{s-2}(\mathbf{R}))$ $(s \geqslant 4)$ 和整体古典解 $u(x, t)$ 有衰减性质

$$\| u \|^2 + \| u_x \|^2 \leqslant (\| u_0 \|^2 + \| u_{0x} \|^2) \mathrm{e}^{-2\sigma_0 t}, t \geqslant 0. \tag{40}$$

如果条件 ①，②，③$_2$ 和 ④ 成立，$\min(\gamma_0, 1 + \alpha_0 + \beta_0) = \sigma$，则 Cauchy 问题(9)，(10) 的整体强解 $u \in C([0, \infty); H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0, \infty); H^{s-2}(\mathbf{R}))$ $(s \geqslant 4)$ 和整体古典解 $u(x, t)$ 有衰减性质

$$\| u \|^2 + \| u_x \|^2 \leqslant (\| u_0 \|^2 + \| u_{0x} \|^2) \mathrm{e}^{-2\sigma t}, t \geqslant 0. \tag{41}$$

证明　利用引理 5 和对 x 进行分部积分，如果对于任意的 $z \in \mathbf{R}, h(z) z \geqslant 0$，得

$$(h(u_x)_x, u) = -(h(u_x), u_x) \leqslant 0; \tag{42}$$

如果 $h'(z) \geqslant \alpha_0$，利用中值定理有

$$(h(u_x)_x, u) = -(h(u_x) - h(0), u_x) = -(h'(\theta_3 u_x) u_x, u_x) \leqslant -\alpha_0 \| u_x \|^2, \tag{43}$$

其中，$0 < \theta_3 < 1$；又有

$$(g(u)_{xx}, u) = -(g'(u_x) u_x, u_x) \leqslant -\beta_0 \| u_x \|^2. \tag{44}$$

和

$$(G(u), u) = (G'(\theta_4 u) u, u) \leqslant -\gamma_0 \| u \|^2, \tag{45}$$

其中，$0 < \theta_4 < 1$.

将(36)，(42)，(44) 和(45) 式代入(35) 式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| u \|^2 + \| u_x \|^2) \leqslant -2\gamma_0 \| u \|^2 - 2(1 + \beta_0) \| u_x \|^2 \leqslant -2\sigma_0(\| u \|^2 + \| u_x \|^2). \tag{46}$$

解不等式(46)，推知(40) 式成立.

将(36)，(43) ~ (45) 式代入(35) 式，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| u \|^2 + \| u_x \|^2) \leqslant -2\gamma_0 \| u \|^2 - 2(1 + \alpha_0 + \beta_0) \| u_x \|^2 \leqslant -2\sigma(\| u \|^2 + \| u_x \|^2). \tag{47}$$

解不等式(47),推知(41)式成立. 定理5得证.

致谢 此文在郑州大学数学系陈国旺教授的指导下完成,特此感谢!

参考文献:

[1] Zhao Huijiang. Optimal temporal decay estimates for the solution to the multidimensional generalized BBM-Burgers equations with dissipative term[J]. Applicable Analysis,2000,75(1/2):85-105.

[2] Zhao Huijiang,Xuan Benjin. Existence and convergence of solutions for the generalized BBM-Burgers equations with dissipative term[J]. Nonlinear Analysis: Theory,Methods & Applications,1997,28(11):1835-1849.

[3] Zhao Huijiang. Existence and convergence of solutions for the generalized BBM-Burgers equations with dissipative term Ⅱ: the multidimensional case[J]. Applicable Analysis,2000,75(1/2):107-135.

[4] Wang Shubin,Chen Guowang. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation[J]. J Math Anal Appl,2002,274(2):846-866.

[5] Wang Shubin,Chen Guowang. Cauchy problem of the generalized double dispersion equation[J]. Nonlinear Analysis: Theory,Methods & Applications,2006,64(1):159-173.

[6] Sogge C D. Lectures on Nonlinear Wave Equations[M]. Boston: International Press of Boston,1995:6-9.

[7] 陈国旺,吕胜关. 人口问题中广义三维Ginzburg-Landau模型方程的初边值问题[J]. 应用数学学报,2000,23(4):507-517.

[8] 王耀东. 偏微分方程的L^2理论[M]. 北京:北京大学出版社,1989:42-44.

The Cauchy Problem for a Generalized BBM-Burgers Equation

ZHANG Neng-wei[1], CHEN Xiang-ying[2]

(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Anyang Normal University*, *Anyang* 455002, *China*;
2. *Department of Economy and Trade*, *Zhengzhou Electric Power College*, *Zhengzhou* 450004, *China*)

Abstract: The existence and uniqueness of the global generalized solution $v \in C([0,\infty);H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0,\infty);H^{s-2}(\mathbf{R}))$ $(s \geqslant 4)$ and the global classical solution of a generalized BBM-Burgers equation

$$v_t - \alpha v_{xxt} - \beta v_{xx} + \gamma v_{xxxx} + f(v)_x = G(v) + h(v_x)_x + g(v)_{xx}, x \in \mathbf{R}, t > 0,$$
$$v(x,0) = v_0(x), \ x \in \mathbf{R}$$

were proved. Moreover, the decay estimate of the solution was given.

Key words: generalized BBM-Burgers equation; Cauchy problem; global solution; decay estimate of solution