DOI: 10.3969/j.issn/1671 -6841.2012.01.007

逻辑系统 L^* 中公式的随机真度

左卫兵

(华北水利水电学院 数学与信息科学学院 河南 郑州 450046)

摘要: 在赋值格为 [0,1] 的模糊逻辑系统 L^* 中，利用序结构和赋值集的随机化方法提出了公式的随机真度，引入公式间的随机相似度和伪距离，导出随机真度和伪距离的若干性质，证明了随机逻辑度量空间中逻辑运算的连续性，拓宽了随机真度的近似推理理论的研究思路.

关键词: 随机真度; 随机相似度; 伪距离; 随机逻辑度量空间

中图分类号: O 141 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671 -6841(2012)01 -0028 -05

0 引言

计量逻辑学[1-6]基于均匀概率的思想提出了命题逻辑系统中公式的真度和逻辑度量空间的理论，它将数理逻辑的形式化、符号化与计算数学的数值计算、近似求解联系起来，让形式化的数理逻辑具有了灵活性并扩大其应用范围，但也存在缺少随机性的不足. 在计量逻辑学中，每个原子公式被赋予了相同的真度，使得两个形式完全相同的公式的真度一定相等，这不符合现实世界中各种简单命题成立的概率不尽相同的事实，因为各简单命题是否为真以及为真的程度是不确定的、随机的. 为此，文献[7]利用赋值集的随机化方法，在经典命题逻辑系统中提出了公式的随机真度概念和随机逻辑度量空间的理论，实现了概率逻辑学与计量逻辑学的融合. 文献[8-10]又在三值 R_0、三值 Godel 和三值 Lukasiewicz 命题逻辑系统中进行了类似的随机化研究，但文献[7-10]进行随机化研究的逻辑系统均是离散值逻辑系统，本文则利用文献[11]中提出的赋值概率密度结合赋值集的随机化方法，在模糊命题逻辑 L^* 中提出了公式的随机真度、公式间的随机相似度和伪距离的概念，建立了 3 种随机逻辑度量空间，证明了随机逻辑度量空间中逻辑运算的连续性，为在模糊命题逻辑中进行随机真度的近似推理拓宽了思路.

1 预备知识

设 $S=\{q_1,q_2,\cdots\}$ 是可数集，$\neg$ 是一元运算，$\vee$ 与 $\to$ 是二元运算，由 S 生成的 $\{\neg,\vee,\to\}$ 型自由代数记作 $F(S)$. $F(S)$ 中的元素称为命题或公式，S 中的元素称为原子命题或原子公式.

定义 1[4] R_0 型命题逻辑系统记为 L^*，其公理如下:

(L^* 1) $A\to(B\to A)$; (L^* 2) $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$;

(L^* 3) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$; ($L^*$ 4) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$;

(L^* 5) $A\to\neg\neg A$; (L^* 6) $A\to A\vee B$;

(L^* 7) $A\vee B\to B\vee A$; (L^* 8) $(A\to C)\wedge(B\to C)\to(A\vee B\to C)$;

(L^* 9) $(A\wedge B\to C)\to(A\to C)\vee(B\to C)$; ($L^*$ 10) $(A\to B)\vee((A\to B)\to\neg A\vee B)$.

L^* 中的推理规则为 MP，以上 $A\wedge B$ 是 $\neg(\neg A\vee\neg B)$ 的缩写.

同时，在系统 L^* 中，用 $A\oplus B$ 表示 $\neg A\to B$，用 $A\otimes B$ 表示 $\neg(A\to\neg B)$. $(\to,\otimes)$ 为伴随对，满足 $a\otimes b\leqslant c$ 当且仅当 $a\leqslant b\to c$，$a,b,c\in[0,1]$，此处 [0,1] 为 R_0 单位区间.

收稿日期: 2011-02-28
基金项目: 河南省自然科学基金资助项目，编号 112300410040; 河南省教育厅自然科学基金资助项目，编号 2011A110012.
作者简介: 左卫兵(1976－)，男，副教授，硕士，主要从事不确定性推理研究，E-mail: wbzuo@ncwu.edu.cn.

引理 1[4]　在系统 L^* 中，设 $a,b,c,d \in [0,1]$，则

(1) $(a \wedge c) \otimes (b \wedge d) \leqslant (a \otimes b) \wedge (c \otimes d)$，

(2) $(a \to b) \otimes (b \to c) \leqslant (a \to c)$.

定义 2　设 $R = \{p_1(x), p_2(x), \cdots\}$ 为 $[0,1]$ 上的函数列，且 $p_i(x)\ (i = 1,2,\cdots)$ 为赋值密度函数[11]，称 R 为赋值密度函数序列.

定义 3　设 R 为赋值密度函数序列，$\forall \vec{x} = (x_1,\cdots,x_m) \in [0,1]^m$，令 $\varphi(\vec{x}) = p_1(x_1) \times \cdots \times p_m(x_m)$，则得一映射 $\varphi: [0,1]^m \to (0,+\infty)$，称 φ 为 $[0,1]^m$ 上的随机化映射密度.

命题 1　φ 为 $[0,1]^m$ 上的随机化映射密度，则 $\int_{[0,1]^m} \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = 1, m = 1,2,\cdots$.

本文讨论系统 L^* 中相关问题，所引用的概念、符号及性质若未加说明的均参见文献[4-5].

2　公式的随机真度

定义 4　设 $A = A(q_1,\cdots,q_m) \in F(S)$，$f_A$ 为公式 A 所诱导的真值函数[4]，R 为赋值密度函数序列，令 $\tau(A) = \int_{[0,1]^m} f_A(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$，称 $\tau(A)$ 为公式 A 的随机真度.

注　易见公式 A 的随机真度是文献[11]中概率真度的推广.

命题 2（随机真度不变性）设 $A = A(q_1,\cdots,q_m) \in F(S)$，记 $\vec{x}_m = (x_1,\cdots,x_m)$，则对任意整数 $n \geqslant m$ 均有 $\int_{[0,1]^m} f_A(\vec{x}_m)\varphi(\vec{x}_m)\,\mathrm{d}\vec{x}_m = \int_{[0,1]^n} f_A^{(n-m)}(\vec{x}_n)\varphi^{(n-m)}(\vec{x}_n)\varphi^{(n-m)}(\vec{x}_n)\,\mathrm{d}\vec{x}_n$. 这里 $f^{(k)}$ 表示 f 的 k 次扩张[5].

以 Δ 表示 $[0,1]^n$，$n \geqslant m$，则公式 A 的随机真度可简记为 $\tau(A) = \int_{\Delta} f_A \varphi$.

由定义 4 及系统 L^* 的基本性质易得如下结论: $0 \leqslant \tau(A) \leqslant 1$; A 为几乎重言式当且仅当 $\tau(A) = 1$; A 为几乎矛盾式当且仅当 $\tau(A) = 0$; $\tau(\neg A) = 1 - \tau(A)$, $\tau(A \otimes \neg A) = 0$, $\tau(A \otimes \neg A) = 1$, $\tau(A(\vee B) \geqslant \tau(A) \vee \tau(B)$, $\tau(A \wedge B) \leqslant \tau(A) \wedge \tau(B)$.

定理 1　设 $A,B \in F(S)$，R 为赋值密度函数序列，则

(1) 若 $\vdash A \to B$，则 $\tau(A) \leqslant \tau(B)$;　(2) 若 $A \sim B$，则 $\tau(A) = \tau(B)$;

(3) $\tau(A \vee B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \wedge B)$;　(4) $\tau(A \vee B) \geqslant \tau(A) + \tau(B) - 1$;

(5) $\tau(A \to B) \leqslant \tau(A \wedge B) - \tau(A) + 1$;　(6) $\tau(A \to B) \leqslant \tau(A) \to \tau(B)$.

证明　(2) 与 (4) 分别是 (1) 与 (3) 的直接结论.

(1) 由随机真度不变性，不妨设公式 A 与 B 具有相同的原子公式. 若 $\vdash A \to B$，则 $\forall \vec{x} \in [0,1]^m$ 有 $f_A(\vec{x}) \leqslant f_B(\vec{x})$，从而 $\tau(A) = \int_{\Delta} f_A \varphi \leqslant \int_{\Delta} f_B \varphi = \tau(B)$.

(3) $\forall \vec{x} \in [0,1]^m$，有 $f_{A \vee B}(\vec{x}) = \max\{f_A(\vec{x}), f_B(\vec{x})\} = f_A(\vec{x}) + f_B(\vec{x}) - \min\{f_A(\vec{x}), f_B(\vec{x})\} = f_A(\vec{x}) + f_B(\vec{x}) - f_{A \wedge B}(\vec{x})$，由定义 4 可知 $\tau(A \vee B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \wedge B)$.

(5) $\forall \vec{x} \in [0,1]^m$，若 $f_A(\vec{x}) \leqslant f_B(\vec{x})$，则 $f_{A \to B}(\vec{x}) = f_A(\vec{x}) \to f_B(\vec{x}) = 1 = f_{A \wedge B}(\vec{x}) - f_A(\vec{x}) + 1$; 否则有 $f_{A \to B}(\vec{x}) = f_{\neg A \vee B}(\vec{x}) = \max\{1 - f_A(\vec{x}), f_B(\vec{x})\} \leqslant f_B(\vec{x}) + 1 - f_A(\vec{x}) = f_{A \wedge B}(\vec{x}) - f_A(\vec{x}) + 1$. 于是有 $f_{A \to B}(\vec{x}) \leqslant f_{A \wedge B}(\vec{x}) - f_A(\vec{x}) + 1$，由定义 4 得 $\tau(A \to B) \leqslant \tau(A \wedge B) - \tau(A) + 1$.

(6) 令 $\Delta_1 = \{\vec{x} \mid f_A(\vec{x}) \leqslant f_B(\vec{x})\}$，则 $\tau(A \to B) = \int_{\Delta} f_{A \to B}\varphi = \int_{\Delta_1}\varphi + \int_{\Delta - \Delta_1} \max\{1 - f_A, f_B\}\varphi \leqslant \int_{\Delta_1}\varphi + \max\left\{\int_{\Delta - \Delta_1}(1 - f_A)\varphi, \int_{\Delta - \Delta_1} f_B \varphi\right\} = \int_{\Delta} f_A \varphi \to \int_{\Delta} f_B \varphi = \tau(A) \to \tau(B)$.

命题 3　设 $A,B,C \in F(S)$，R 为赋值密度函数序列，则

(1) $\tau(A \to (A \oplus B)) = 1$, $\tau((A \oplus B) \to A) = 1$, $\tau(A \to B \to (A \otimes B)) = 1$.

(2) $\tau((A \otimes B) \to C) = \tau(A \to (B \to C))$.

(3) $\tau(A \otimes (B \vee C)) = \tau((A \otimes B) \vee (A \otimes C))$, $\tau(A \otimes (B \wedge C)) = \tau((A \otimes B) \wedge (A \otimes C))$.

(4) $\tau(A \oplus (B \vee C)) = \tau((A \oplus B) \vee (A \oplus C))$, $\tau(A \oplus (B \wedge C)) = \tau((A \oplus B) \wedge (A \oplus C))$.

(5) $\tau(A\otimes B)\leqslant\tau(A\wedge B)\leqslant\tau(A\vee B)\leqslant(A\oplus B)$.

定理2 设$A,B,C\in F(S)$，R为赋值密度函数序列,$\alpha,\beta\in[0,1]$，则

(1)(MP规则) 若$\tau(A)\geqslant\alpha,\tau(A\to B)\geqslant\beta$,则$\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(2)(HS规则) 若$\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(B\to C)\geqslant\beta$,则$\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(3)(交推理规则) 若$\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(B\to C)\geqslant\beta$，则$\tau(A\to(B\wedge C))\geqslant\alpha+\beta-1$.

证明 (1) 由定理1(5) 知$\tau(A\to B)\leqslant\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1\leqslant\tau(B)-\tau(A)+1$，即$\tau(B)\geqslant\tau(A)+\tau(A\to B)-1$.

(2) 因为$\vdash(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$,则$\tau((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))=1$. 由$\tau(B\to C)\geqslant\beta$，利用(1) 得$\tau((A\to B)\to(A\to C))\geqslant 1+\beta-1=\beta$; 再利用(1) 及$\tau(A\to B)\geqslant\alpha$可得结论.

(3) 由$A\to(B\wedge C)\approx(A\to B)\wedge(A\to C)$及定理1(3) 可得$\tau(A\to B\wedge C)=\tau((A\to B)\wedge(A\to C))\geqslant\tau(A\to B)+\tau(A\to C)-1\geqslant\alpha+\beta-1$.

命题4 设$A,B,C\in F(S)$，R为赋值密度函数序列，则

(1) $\tau(A\vee B\to B\vee C)\geqslant\tau(A\to B)\vee\tau(A\to C)$.

(2) $\tau(A\wedge B\to B\wedge C)\geqslant\tau(A\to B)\vee\tau(B\to C)$.

(3) $\tau((B\to C)\to(A\to C))\geqslant\tau(A\to B)\vee\tau(A\to C)$.

3 公式间的随机相似度及伪距离

利用公式的随机真度可以在逻辑系统L^*中给出公式间的随机相似度和伪距离.

定义5 设$A,B\in F(S)$，R为赋值密度函数序列，则称

(1) $\xi_1(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))$为公式$A$与$B$之间的第一种随机相似度;

(2) $\xi_2(A,B)=\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)$为公式$A$与$B$之间的第二种随机相似度;

(3) $\xi_3(A,B)=(\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A))$为公式$A$与$B$之间的第三种随机相似度.

定理3 设$A,B,C\in F(S)$,R为赋值密度函数序列，则

(1) $\xi_k(A,A)=1,\xi_k(A,B)=\xi_k(B,A),k=1,2,3$.

(2) $\xi_k(A,C)\geqslant\xi_k(A,B)+\xi_k(B,C)-1,k=1,2,3$.

(3) $\xi_1(A,B)\leqslant\xi_2(A,B)\leqslant\xi_3(A,B)$.

证明 (1) 显然.

(2) (i) 注意到$\xi_1(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-\tau((A\to B)\vee(B\to A))=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1$. 利用定理2(2) 得

$$\begin{aligned}\xi_1(A,C)&=\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1\\&\geqslant(\tau(A\to B)+\tau(B\to C)-1)+(\tau(C\to B)+\tau(B\to A)-1)-1\\&=(\tau(A\to B)+\tau(B\to A)-1)+(\tau(B\to C)+\tau(C\to B)-1)-1\\&=\xi_1(A,B)+\xi_1(B,C)-1.\end{aligned}$$

(ii) 令$a\odot b=(a+b-1)\vee 0,a,b\in[0,1]$,由剩余格[4]的性质可知$(a\wedge b)\odot(b\wedge d)\leqslant(a\odot b)\wedge(c\odot d),a,b,c,d\in[0,1]$,则

$$\begin{aligned}\xi_2(A,C)&=\tau(A\to C)\wedge\tau(C\to A)\\&\geqslant((\tau(A\to B)+\tau(B\to C)-1)\vee 0)\wedge((\tau(C\to B)+\tau(B\to A)-1)\vee 0)\\&=(\tau(A\to B)\odot\tau(B\to C))\wedge(\tau(B\to A)\odot\tau(C\to B))\\&\geqslant(\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A))\odot(\tau(B\to C)\wedge\tau(C\to B))\\&\geqslant\xi_2(A,B)+\xi_2(B,C)-1.\end{aligned}$$

(iii) 由引理1(2) 知$\tau(A)\to\tau(C)\geqslant(\tau(A)\to\tau(B))\otimes(\tau(B)\to\tau(C))$及$\tau(C)\to\tau(A)\geqslant(\tau(C)\to\tau(B))\otimes(\tau(B)\to\tau(A))$,利用算子$\otimes$与$\odot$的大小关系[5],即$a\otimes b\geqslant a\odot b,a,b\in[0,1]$,可得

$$\xi_3(A,B)=(\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A))$$

$$\geqslant((\tau(A)\to\tau(B))\otimes(\tau(B)\to\tau(C)))\wedge((\tau(C)\to\tau(B))\otimes(\tau(B)\to\tau(A)))$$
$$=((\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A)))\otimes((\tau(B)\to\tau(C))\wedge(\tau(C)\to\tau(B)))$$
$$=\xi_3(A,B)\otimes\xi_3(B,C)$$
$$\geqslant\xi_3(A,B)\odot\xi_3(B,C)$$
$$\geqslant\xi_3(A,B)+\xi_3(B,C)-1.$$

(3) 因为$(a\to b)\wedge(b\to a)\leqslant a\to b, a,b\in[0,1]$,所以$\xi_1(A,B)\leqslant\tau(A\to B)$且$\xi_1(A,B)\leqslant\tau(B\to A)$,从而$\xi_1(A,B)\leqslant\min\{\tau(A\to B),\tau(B\to A)\}=\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)=\xi_2(A,B)$. 又由定理1(6)知$\xi_2(A,B)\leqslant(\tau(A)\to\tau(B))\wedge(\tau(B)\to\tau(A))=\xi_3(A,B)$.

定义6 设$A,B\in F(S)$,R为赋值密度函数序列,规定:$\rho_k(A,B)=1-\xi_k(A,B)$,$k=1,2,3$,则ρ_k是$F(S)$上的伪距离,称$(F(S),\rho_k)$ $(k=1,2,3)$为随机逻辑度量空间.

命题5 设$A,B,C\in F(S)$,R为赋值密度函数序列,则

(1) $\rho_k(A,A)=0, 0\leqslant\rho_k(A,B)\leqslant 1, \rho_k(A,B)=\rho_k(B,A)$,$k=1,2,3$.

(2) $\rho_k(A,C)\leqslant\rho_k(A,B)+\rho_k(B,C)$,$k=1,2,3$.

(3) $\rho_1(A,B)\geqslant\rho_2(A,B)\geqslant\rho_3(A,B)$.

(4) $\rho_1(A,B)=2-\tau(A\to B)-\tau(B\to A)$.

(5) $\rho_2(A,B)=\dfrac{1}{2}(\rho_1(A,B)+|\tau(A\to B)-\tau(B\to A)|)$.

(6) $\rho_3(A,B)=2-\tau(A)\to\tau(B)-\tau(B)\to\tau(A)=|\tau(A)\to\tau(B)-\tau(B)\to\tau(A)|$.

下面讨论逻辑运算$\neg,\vee,\to,\wedge,\oplus,\otimes$等在随机逻辑度量空间$(F(S),\rho_k)$ $(k=1,2,3)$上的连续性. 由于在系统L^*中联结词的最小完备集为$\{\neg,\vee,\to\}$,即联结词$\wedge,\oplus,\otimes$可由$\{\neg,\vee,\to\}$表示,故仅需讨论逻辑运算$\neg,\vee,\to$的连续性.

定理4 设$A,B\in F(S)$,R为赋值密度函数序列,则$\rho_k(\neg A,\neg B)=\rho_k(A,B)$,$k=1,2,3$.

证明(i) $\rho_1(\neg A,\neg B)=2-\tau(\neg A\to\neg B)-\tau(\neg B\to\neg A)=2-\tau(B\to A)-\tau(A\to B)=\rho_1(A,B)$.

(ii) 由命题5(5)得 $\rho_2(\neg A,\neg B)=\dfrac{1}{2}(\rho_1(\neg A,\neg B)+|\tau(\neg A\to\neg B)-\tau(\neg B\to\neg A)|)=\dfrac{1}{2}(\rho_1(A,B)+|\tau(B\to A)-\tau(A\to B)|)=\rho_2(A,B)$.

(iii) $\rho_3(\neg A,\neg B)=|\tau(\neg A)\to\tau(\neg B)-\tau(\neg B)\to\tau(\neg A)|=|\tau(A)\to\tau(B)-\tau(B)\to\tau(A)|=\rho_3(A,B)$.

推论1 设$A,A_n\in F(S)$ $(n=1,2,\cdots)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(A_n,A)=0$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(\neg A_n,\neg A)=0$.

引理2 设$A,B,C\in F(S)$,R为赋值密度函数序列,则$\rho_k(A\vee C,B\vee C)\leqslant\rho_k(A,B)$,$k=1,2$.

证明 (i) 由命题5(4)得

$$\begin{aligned}\rho_1(A\vee C,B\vee C)&=2-\tau(A\vee C\to B\vee C)-\tau(B\vee C\to A\vee C)\\&=2-\tau((A\to B\vee C)\wedge(C\to B\vee C))-\tau((B\to A\vee C)\wedge(C\to A\vee C))\\&=2-\tau(A\to B\vee C)-\tau(B\to A\vee C)\\&=2-\tau((A\to B)\vee(A\to C))-\tau((B\to A)\wedge(B\to C))\\&\leqslant 2-\tau(A\to B)-\tau(B\to A)=\rho_1(A,B).\end{aligned}$$

(ii) 类似于(i)的推导步骤,

$$\begin{aligned}\rho_2(A\vee C,B\vee C)&=1-\tau(A\vee C\to B\vee C)\wedge\tau(B\vee C\to A\vee C)\\&=1-\tau((A\to B)\vee(A\to C))\wedge\tau((B\to A)\vee(B\to C))\\&\leqslant 1-\tau(A\to B)\wedge\tau(B\to A)=\rho_2(A,B).\end{aligned}$$

引理3 设$A,B,C\in F(S)$,R为赋值密度函数序列,则$\rho_k(A\to C,B\to C)\leqslant\rho_k(A,B)$,$k=1,2$.

证明 仅证明ρ_1的情形,ρ_2的结论类似可得.

$$\begin{aligned}\rho_1(A\to C,B\to C)&=2-\tau((A\to C)\to(B\to C))-\tau((B\to C)\to(A\to C))\\&=2-\tau(B\to((A\to C)\to C))-\tau(A\to((B\to C)\to C))\\&\leqslant 2-\tau(B\to(A\vee C))-\tau(A\to(B\vee C))\\&\leqslant 2-\tau(B\to A)-\tau(A\to B)=\rho_1(A,B).\end{aligned}$$

引理4 设$A,B,C\in F(S)$,R为赋值密度函数序列,则$\rho_k(C\to A,C\to B)\leqslant\rho_k(A,B)$,$k=1,2$.

证明 由引理3及定理4得$\rho_k(C\to A,C\to B)=\rho_k(\neg A\to\neg C,\neg B\to\neg C)\leqslant\rho_k(\neg A,\neg B)=\rho_k(A,B)$.

定理5 设$A,B,C,D\in F(S)$,R为赋值密度函数序列,则

(1) $\rho_k(A\vee C,B\vee D)\leqslant\rho_k(A,B)+\rho_k(C,D)$,$k=1,2$.

(2) $\rho_k(A\to C,B\to D)\leqslant\rho_k(A,B)+\rho_k(C,D)$,$k=1,2$.

推论2 设$A,B,A_n,B_n\in F(S)(n=1,2,\cdots)$,$R$为赋值密度函数序列,若$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(A_n,A)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(B_n,B)=0$,$k=1,2$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(A_n\vee B_n,A\vee B)=0$,$k=1,2$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(A_n\to B_n,A\to B)=0$,$k=1,2$.

推论3 设$A,B,A_n,B_n\in F(S)(n=1,2,\cdots)$,$R$为赋值密度函数序列,若$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(A_n,A)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(B_n,B)=0$,$k=1,2$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(A_n\wedge B_n,A\wedge B)=0$,$k=1,2$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(A\oplus B_n,A\oplus B)=0$,$k=1,2$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_k(A_n\otimes B_n,A\otimes B)=0$,$k=1,2$.

定理6 在随机逻辑度量空间$(F(S),\rho_k)(k=1,2)$中逻辑运算$\neg,\vee,\to,\wedge,\oplus,\otimes$均是连续的.

注 随机逻辑度量空间$(F(S),\rho_3)$中逻辑运算$\neg,\vee,\to,\wedge,\oplus,\otimes$的连续性的论证有一定难度,有待进一步研究.

参考文献:

[1] 王国俊,傅丽,宋建社. 二值命题逻辑中命题的真度理论[J]. 中国科学A辑,2001,31(11):998-1008.

[2] Wang G J, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136(1):71-91.

[3] 王国俊,李璧镜. Lukasiewicz n值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理[J]. 中国科学E辑,2005,35(6):561-569.

[4] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 第2版. 北京:科学出版社,2006.

[5] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 第2版. 北京:科学出版社,2008.

[6] 崔美华. 模糊逻辑系统中公式的积分真度和伪距离[J]. 工程数学学报,2010,27(5):873-882.

[7] 惠小静,王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用[J]. 中国科学:E辑,2007,37(6):801-812.

[8] 惠小静. 三值R_0命题逻辑系统的随机化[J]. 应用数学学报,2009,32(1):19-27.

[9] 惠小静,刘兴祥. 三值Godel命题逻辑系统的随机化[J]. 模糊系统与数学,2009,23(4):1-7.

[10] 崔美华. 逻辑系统L_3中公式的随机真度及近似推理[J]. 高校应用数学学报,2010,25(4):496-502.

[11] 左卫兵,毋红军. 连续值命题逻辑系统中公式的概率真度[J]. 河南教育学院学报,2007,16(1):23-25.

Randomized Truth Degree of Formulae in the Logic System L^*

ZUO Wei-bing

(*College of Mathematics and Information Science, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou* 450046, *China*)

Abstract: In the logic system L^* with valuation lattice [0,1], using properties of the order structure and the randomization method of valuation set the randomized truth degree of formulas was introduced. The concepts of randomized similarity and pseudo-metric between formulas were introduced and conditional randomized logic metric space was built. Several properties of randomized truth degree and pseudo-metric were deduced and it was proved that the logical operations were continuous on randomized logic metric space. The mind was broadened for studying approximate reasoning of the randomized truth degree.

Key words: randomized truth degree; randomized similarity; pseudo-distance; randomized logic metric space