

# 球面各向同性冲击载荷作用下弹性球体 求解的 Green 函数法

吕金城, 原新生, 肖建清

(安阳师范学院 建筑工程学院 河南 安阳 455002)

摘要: 通过建立球面各向同性冲击载荷作用下弹性球体的 Green 函数, 得到了问题的位移分布的解析解和相应的动应力分布表达式. 此解法不仅避免了将动力学的一般解分解为拟静态解和自由振动解叠加的过程, 而且解的形式适用于各种初始条件, 便于数值计算和应力分布规律的分析. 通过一个实例的计算, 表明了求解方法的正确性, 并据此结果具体分析了弹性球体的动应力分布规律.

关键词: 各向同性; 弹性球体; Green 函数; 应力分布

中图分类号: O 174.6; O 347.1 文献标志码: A 文章编号: 1671-6841(2013)04-0109-05

DOI: 10.3969/j.issn/1671-6841.2013.04.022

## 0 引言

对各向同性球面或球壳的研究由于有其广泛的工程应用背景而一直受到人们的普遍重视, 产生了许多重要的结果和方法<sup>[1-3]</sup>. 应力波在弹性介质中传播的解法有特征线法<sup>[4]</sup>、积分变换法<sup>[5]</sup>、广义射线法<sup>[6]</sup>等. 文献[7]通过引入3个位移函数, 给出了球面各向同性弹性力学运动方程的简化方程组; 文献[8]利用特征函数展开法, 将动力学的一般解分解为满足非齐次边界条件的准静态解和仅满足齐次边界条件的自由振动解, 给出了弹性球体在冲击载荷下应力波传播的解析解. 这些解法都有各自的优点, 同时也存在应用的局限性, 特别是解的形式不利于数值计算和动应力分布规律的分析.

作者通过建立球面各向同性冲击载荷作用下弹性球体的 Green 函数, 给出了弹性球体在各种初始条件下的位移分布的解析解和相应的动应力分布表达式. 通过一个实例的计算, 发现径向动应力和周向动应力波的波峰在球心附近有显著的高峰值现象, 可解释为动应力波头在外表面碰撞并向球心集中的结果. 同时还发现, 材料的 Poisson 比对动应力波峰有决定性的影响, 而材料的弹性模量则对动应力波的周期震荡的频率有决定性作用. 这些结果与已有的结果相一致, 表明了求解方法的正确性.

## 1 Green 函数的基本公式

半径为  $b$  的均匀各向同性弹性球体, 其边界受法向冲击载荷  $\psi(t)$  的作用, 由于问题具有球对称性, 所以在球坐标下只有径向位移分量  $u(r, t)$ , 则问题的运动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right] = 0 \quad 0 \leq r \leq b, t \geq 0. \quad (1)$$

边界条件为

$$u(0, t) = 0, \sigma_r(b, t) = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\mu \frac{u}{r} \right]_{r=b} = \psi(t). \quad (2)$$

初始条件为

收稿日期: 2013-05-30

基金项目: 国家青年自然科学基金资助项目, 编号 11002067.

作者简介: 吕金城(1969-), 男, 副教授, 硕士, 主要从事应用数学和力学研究, E-mail: ayyxs@126.com.

$$u(r, 0) = \varphi_1(r), \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = \varphi_2(r). \quad (3)$$

物理方程(Hooke 定律)为

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\mu \frac{u}{r} \right], \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right], \quad (4)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0.$$

式中  $\mu$  表示泊松比,  $E$  表示弹性模量,  $\rho$  表示质量密度,  $c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}$  表示纵波波速,  $\varphi_1(r)$  和  $\varphi_2(r)$  表示球体的初始状态.

定解问题(1)~(3)的 Green 函数  $G(r, t; \xi, \tau)$  定义为下述定解问题的解:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G) \right] = \delta(r-\xi) \delta(t-\tau), \quad 0 \leq r \leq b, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$G(r, t; \xi, \tau) \Big|_{r=0} = 0, \quad \left[ (1-\mu) \frac{\partial G}{\partial r} + 2\mu \frac{G}{r} \right]_{r=b} = 0, \quad (6)$$

$$G(r, t; \xi, \tau) \Big|_{t < \tau} = 0, \quad \frac{\partial G(r, t; \xi, \tau)}{\partial t} \Big|_{t < \tau} = 0. \quad (7)$$

Green 函数  $G(r, t; \xi, \tau)$  表示在  $\tau$  时刻位于  $\xi$  处的瞬时点载荷所引起的球位移分布, 因此, 在瞬时单位载荷作用之前, 位移和速度分布为零, 即(7)式所示. 由文献[9]和冲量原理, 可以得到如下两个引理.

引理 1(基本积分公式) 定解问题(1)~(3)的解, 可用 Green 函数  $G(r, t; \xi, \tau)$  表示为

$$u(r, t) = \int_0^b [\varphi_2(\xi) G(r, t; \xi, 0) \Big|_{\tau=0} - \varphi_1(\xi) \frac{\partial G(r, t; \xi, 0)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}] d\xi + \frac{1}{\rho} \int_0^t \psi(\tau) G(r, t; \xi, \tau) \Big|_{\xi=b} d\tau. \quad (8)$$

引理 2(冲量原理) 定解问题(5)~(7)的解与下述定解问题的解等价:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) \right] \right\} G(r, t; \xi, \tau) = 0, \quad 0 \leq r \leq b, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

$$G(r, t; \xi, \tau) \Big|_{r=0} = 0, \quad \left[ (1-\mu) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\mu}{r} \right] G(r, t; \xi, \tau) \Big|_{r=b} = 0, \quad (10)$$

$$G(r, t; \xi, \tau) \Big|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial G(r, t; \xi, \tau)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = \delta(r-\xi). \quad (11)$$

## 2 Green 函数的分离变量求解和位移解析解

由引理 1 和引理 2 可以看出, 只要求出 Green 函数  $G(r, t; \xi, \tau)$ , 即可求出定解问题(1)~(3)的解  $u(r, t)$ , 而定解问题(9)~(11)中的方程和边界条件均为齐次的, 可以用分离变量法进行求解.

令  $T = t - \tau$ , 并设  $G(r, t; \xi, \tau) = R(r; \xi, \tau) X(t; \xi, \tau)$ , 可得方程和本征值问题如下:

$$\frac{d^2 X}{dT^2} + (\lambda c)^2 X = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \lambda^2 - \frac{2}{r^2} \right) R = 0, \quad (13)$$

$$R(0) = 0, \quad (14)$$

$$\left[ (1-\mu) \frac{dR}{dr} + \mu \frac{R}{r} \right]_{r=b} = 0. \quad (15)$$

本征值问题(13)~(15)的特征方程和通解分别为

$$\lambda(1-\mu) j_1(\lambda b) + \frac{2\mu}{b} j_1(\lambda b) = 0, \quad (16)$$

$$R(r; \xi, \tau) = A j_1(\lambda r), \quad (17)$$

其中  $j_1(x)$  为第 2 类 1 阶 Bessel 函数. 特征方程(16)式将确定无穷多正的实根  $\lambda_i (i=1, 2, \dots)$ , 利用线性叠加原理可得

$$G(r, t; \xi, \pi) = \sum_{i=1}^{\infty} C_j(\lambda_i r) \sin \lambda_i c t. \quad (18)$$

使用 Bessel 函数的正交性可得

$$C = \frac{\int_0^b j_1(\lambda_i r) r^2 \delta(r - \xi) dr}{\lambda_i c \int_0^b j_1^2(\lambda_i r) r^2 dr}. \quad (19)$$

利用球 Bessel 函数和半奇数阶柱 Bessel 函数之间的关系, 特征方程(16) 式和常数  $C$  分别表示为

$$(2 + \mu) J_{1/2}(\lambda b) + (7\mu - 4) J_{5/2}(\lambda b) = 0, \quad (20)$$

$$C = \frac{8\lambda_i^2 \xi^2 \mu^2}{b(4\lambda_i^2 b^2 \mu^2 + 1 - 4\mu - 5\mu^2)} \frac{j_1(\lambda_n \xi)}{j_1(\lambda_n b)}. \quad (21)$$

令

$$C_b = C|_{\xi=b} = \frac{8\lambda_i b}{c[4(\lambda_i b)^2 \mu^2 + 1 - 4\mu - 5\mu^2] j_1(\lambda_i b)} \quad C_c = \int_0^b C d\xi,$$

应用基本公式(8), 可得位移表达式

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ C_c j_1(\lambda_i r) [\varphi_2(r) \sin \lambda_i c t + \varphi_1(r) \lambda_i c \cos \lambda_i c t] + \frac{1}{\rho} C_b j_1(\lambda_i r) \int_0^t \psi(\tau) \sin \lambda_i c(t - \tau) d\tau \right\}. \quad (22)$$

### 3 实例计算和结果讨论

设球体在  $t = 0$  时处于静止状态, 则

$$u(r, 0) = \varphi_1(r) = 0, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = \varphi_2(r) = 0. \quad (23)$$

球外表面受突加压力为

$$\psi(t) = -\sigma_0 H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ -\sigma_0 & t \geq 0^+. \end{cases} \quad (24)$$

将式(23) 和(24) 应用于式(22), 可得位移分布的简洁形式为

$$u(r, t) = \frac{\sigma_0}{\rho c} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_b}{\lambda_i} j_1(\lambda_i r) (\cos \lambda_i c t - 1). \quad (25)$$

利用 Bessel 函数的性质, 动应力场表达式为

$$\sigma_{rr} = \frac{c\sigma_0}{3(1-\mu)} \sum_{i=1}^{\infty} C_b \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_i r}} [(1+\mu) J_{1/2}(\lambda_i r) - 2(1-\mu) J_{5/2}(\lambda_i r)] (\cos \lambda_i c t - 1), \quad (26)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{c\sigma_0}{c(1-\mu)} \sum_{i=1}^{\infty} C_b \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_i r}} [(1+\mu) J_{1/2}(\lambda_i r) + (1-2\mu) J_{5/2}(\lambda_i r)] (\cos \lambda_i c t - 1), \quad (27)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}. \quad (28)$$

从动应力场表达式中可以看出, 在  $r=0$  处, 动应力场在球体球心处存在奇异性.

取  $\mu = 0.25$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 并取无量纲变量

$$T = \frac{c}{b} t, \quad R = \frac{r}{b}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0}, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_0},$$

利用文献[10]提供的方法, 可得到应力场的理论图示(图1~3).

图1表示弹性球体在边界附近的动应力响应历程, 从图中可以看出, 当应力波波头随时间由外界向球心传播而尚未到达某点时, 该点的动应力为零. 当波头到达该点时, 该点动应力值呈强间断跳跃. 而当波头远离该点时, 该点的动应力值趋于静载时的静应力值. 这一现象与文献[5]相同, 从而验证了该解法的正确性.

图2表示径向动应力和周向动应力的响应历程和分布规律. 从图中可以看出, 距离  $A$  点最近的球面上的冲击载荷波最先传播到该点, 其径向应力有显著的跳跃, 然后随球表面其他点上应力波的到来, 该点的径

向应力平稳变化,直到距该点最远的球面点上的冲击载荷通过该点后,径向应力有较大回落.球心附近的动应力值远大于球面附近其他点的动应力值,这是应力波在外边界向球心处反射的干涉造成的动应力集中现象.由于应力波在外边界的连续反射作用,动应力呈现强间断效应,并且具有周期性的剧烈震荡.

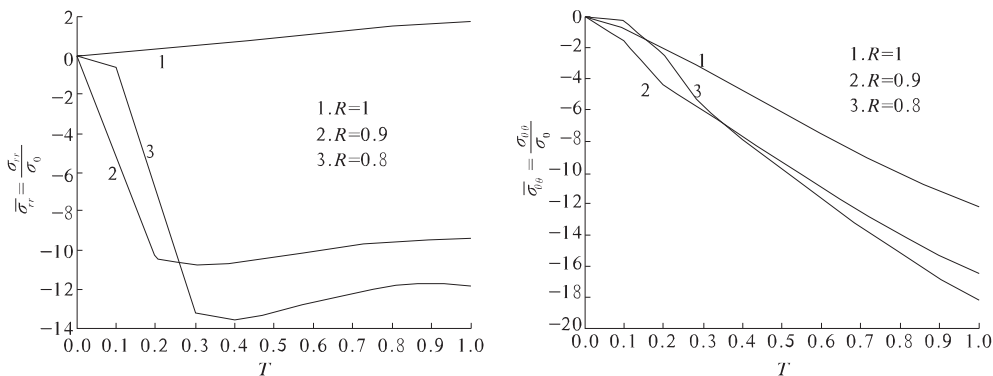


图1 无反射波干涉的动应力响应历程

Fig. 1 Dynamic stress response of the non-reflected wave interference

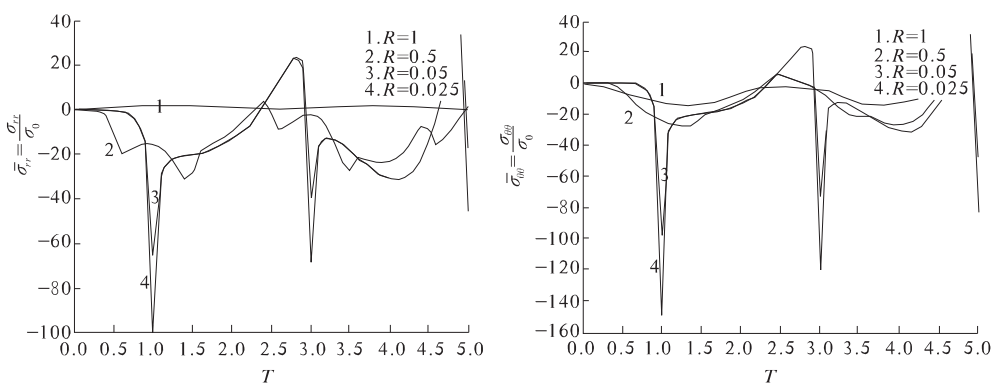


图2 径向动应力与周向动应力的响应历程和分布规律

Fig. 2 The response process and distribution laws of radial stress and circumferential stress

图3 分别在  $r=0.5b$  和  $r=0.75b$  处比较了径向动应力和周向动应力的变化情况.从图中可以看出,径向应力跳跃显著,而周向应力则变化平稳.

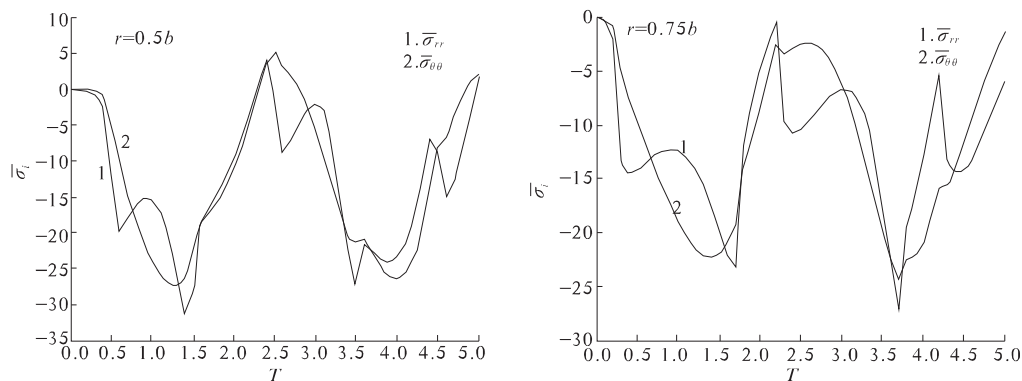


图3 径向动应力与周向动应力比较

Fig. 3 The contrast between radial stress and circumferential stress

### 4 结语

将球面各向同性冲击载荷作用下球体的位移分布用 Green 函数表示,通过求解 Green 函数得到了问题

的解析解和相应的动应力分布表达式,此解法不仅避免了将动力学的一般解分解为拟静态解和自由振动解叠加的过程,而且解的形式适用于各种初始条件,便于数值计算和应力分布规律的分析。建立问题的 Green 函数并对问题进行研究的方法可以推广到其他情形。

## 参考文献:

- [1] 余同希. 冲击载荷下材料和结构的响应[J]. 力学进展, 1997, 27(2): 276-280.
- [2] 吴洪飞, 王新云, 王仲仁. 等容重柱形壳和球壳的耐外压实验研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2002, 34(3): 367-369.
- [3] 葛涛, 潘越峰, 罗昆升, 等. 薄壁球壳内部爆炸的变形与破坏模拟[J]. 解放军理工大学学报: 自然科学版, 2004, 5(1): 53-56.
- [4] Chou P C, Koenig H A. A unified approach to cylindrical and spherical elastic waves by method of characteristics [J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(1): 159-167.
- [5] Cinelli G. Dynamic vibrations and stresses in elastic cylinders and spheres [J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(4): 825-830.
- [6] Pao Y H, Ceranoglu A N. Determination of transient responses of a thick-walled spherical shell by the ray theory [J]. Journal of Applied Mechanics, 1978, 45(1): 114-122.
- [7] 丁皓江, 任永坚, 邵道勤, 等. 球面各向同性弹性力学的位移解法[J]. 力学学报, 1994, 26(2): 186-197.
- [8] 达文洋. 弹性球体在冲击载荷下的应力波传播[J]. 河南科技大学学报: 自然科学版, 2004, 25(5): 85-88.
- [9] 王载舆. 数学物理方程及特殊函数[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991: 377-385.
- [10] 吕金城, 纪多辙. 球 Bessel 方程本征值问题特征方程根的 Matlab 算法[J]. 兰州理工大学学报, 2007, 33(3): 152-155.

## Green Function Method for Solving Elastic Solid Sphere under an Isotropic Impact Load

LÜ Jin-cheng, YUAN Xin-sheng, XIAO Jian-qing

(School of Civil Engineering, Anyang Normal University, Anyang 455002, China)

**Abstract:** Analytical solution of displacement distribution and corresponding expressions of dynamic stress were obtained by building Green function for elastic solid sphere under an isotropic impact load. With this method, not only the process which decomposed dynamic general solution to quasi-static solution and free vibration solution was avoided, but also the form of solution was suitable for all kinds of original conditions, easy for numerical calculation and dynamic stress analyses. Through a real example, the solving method was shown as correct and dynamic stress distribution was analyzed with this result.

**Key words:** isotropic; elastic solid sphere; Green function; dynamic stress