第 45 卷第 4 期　　郑州大学学报(理学版)　　Vol. 45 No. 4
2013 年 12 月　　J. Zhengzhou Univ. (Nat. Sci. Ed.)　　Dec. 2013

一类非线性四阶差分方程边值问题正解的存在性准则

刘　览，胡　宏

(徐州工程学院 数学与物理科学学院　江苏 徐州 221008)

摘要: 运用不动点指数理论，获得了非线性四阶差分方程边值问题

$$\Delta^4 u(t-2) = \lambda f(t,u(t)),\ t \in T_2,$$
$$u(0) = u(T+2) = \Delta u(0) = \Delta u(T+1) = 0$$

正解的存在性准则，其中，$T_2 = \{2,3,\cdots,T\}$，$f: T_2 \times \mathbf{R} \to [0,\infty)$ 连续且 $T > 4$，$\lambda > 0$ 为参数.

关键词: 四阶差分方程; 正解; 存在性; 不动点指数

中图分类号: O 175.7　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671 - 6841(2013)04 - 0030 - 07

DOI: 10.3969/j.issn/1671 - 6841.2013.04.008

0　引言

差分方程不仅可以作为研究微分方程离散化的基本形式，还可以描述经济学、人口动力学中的实用模型. 因此，非线性差分方程的研究备受关注[1-4]. 近年来，对两端简单支撑的非线性四阶差分方程边值问题

$$\Delta^4 u(t-2) = \lambda f(t,u(t)),\ t \in T_2,$$
$$u(0) = u(T+2) = \Delta^2 u(T) = \Delta^2 u(0) = 0$$

解的存在性的研究取得了丰富的成果[5-8]. 然而，对于如下四阶差分方程边值问题

$$\Delta^4 u(t-2) = \lambda f(t,u(t)),\ t \in T_2,\qquad (1)$$
$$u(0) = u(T+2) = \Delta u(0) = \Delta u(T+1) = 0$$

正解的存在性研究却相对较少，其中，$T_2 = \{2,3,\cdots,T\}$，$f: T_2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续且 $T > 4$，$\lambda > 0$ 为参数.

众所周知，两端固定支撑的弹性梁方程

$$u''''(t) = \lambda f(t,u(t)),\ t \in [0,1],\qquad (2)$$
$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$$

在工程中有着重要的应用，对于问题(2)正解的存在性与多解性已有很多研究[9-15]. 值得注意的是问题(1)可以看作问题(2)的离散形式，研究问题(1)正解的存在性有助于求解(2)的数值解. 同时，问题(1)也可以看作工程中两端固定支撑弹性梁的离散模型，文中获得问题(1)正解存在性的参数区间是最优的，这有助于解决实际问题中的数据选取，同时也对差分方程边值问题正解的存在性提供了一种研究方法.

1　主要结果

为了方便，引进一些记号:

$$f_0 = \liminf_{s\to 0} \min_{t\in T_2} \frac{f(t,s)}{s},\ f_\infty = \liminf_{s\to \infty} \min_{t\in T_2} \frac{f(t,s)}{s},\ f^0 = \limsup_{s\to 0} \max_{t\in T_2} \frac{f(t,s)}{s},\ f^\infty = \limsup_{s\to \infty} \max_{t\in T_2} \frac{f(t,s)}{s}.$$

下面给出主要结果.

收稿日期: 2013 - 06 - 08

作者简介: 刘览(1979 -)，女，讲师，硕士，主要从事差分方程与概率统计研究，E-mail: 154511777@qq.com; 通讯作者: 胡宏(1977 -)，男，讲师，硕士，主要从事差分方程与概率统计研究，E-mail: hhcln@163.com.

定理1　假定$f:T_2\times\mathbf{R}\to[0,\infty)$连续，令$\frac{1}{0}:=+\infty$，$\frac{1}{+\infty}:=0$.

(i) 若$0\leqslant f^{\infty}\leqslant f_0\leqslant+\infty$，则对任意的$\lambda\in\left(\frac{\lambda_1}{f_0},\frac{\lambda_1}{f^{\infty}}\right)$，问题(1) 至少存在一个正解;

(ii) 若$0\leqslant f^{0}\leqslant f_{\infty}\leqslant+\infty$，则对任意的$\lambda\in\left(\frac{\lambda_1}{f_{\infty}},\frac{\lambda_1}{f^{0}}\right)$，问题(1) 至少存在一个正解，

其中，λ_1为线性特征值问题

$$\Delta^4u(t-2)=\lambda u(t),t\in T_2\text{ 和 }u(0)=u(T+2)=\Delta u(0)=\Delta u(T+1)=0\tag{3}$$

的第一个正的特征值.

注1　定理1中给出问题(1)正解存在的参数区间

$$\frac{\lambda_1}{f_0}<\lambda<\frac{\lambda_1}{f^{\infty}}\text{或者}\frac{\lambda_1}{f_{\infty}}<\lambda<\frac{\lambda_1}{f^{0}}$$

是最优的. 例如考虑如下边值问题

$$\begin{aligned}&\Delta^4u(t-2)=\lambda f(u(t)),t\in T_2,\\&u(0)=u(T+2)=\Delta^2u(0)=\Delta^2u(T)=0,\end{aligned}\tag{4}$$

其中，$f(u)=\begin{cases}\lambda_1u+u^2,0\leqslant u\leqslant1\\\lambda_1u+1,u\geqslant1\end{cases}$，$\lambda_1$为问题(3)的第一个正的特征值，记$\varphi$为相应于$\lambda_1$的特征函数. 显然，$f^0=f_0=\lambda_1$，$f^{\infty}=f_{\infty}=\lambda_1$. 若$\lambda=1$时，则问题(4)不存在正解.

事实上，假设u为问题(4)的一个正解，则(4)两边同乘以φ，并从$t=2$到$t=T$求和，可得

$$\lambda_1\sum_{t=2}^{T}u(t)\varphi(t)=\sum_{t=2}^{T}\Delta^4\varphi(t-2)u(t)=\sum_{t=2}^{T}\Delta^4u(t-2)\varphi(t)=\sum_{t=2}^{T}f(u(t))\varphi(t).$$

由f的定义可知，

$$\lambda_1\sum_{t=2}^{T}f(u(t))\varphi(t)=\lambda_1\sum_{t=2}^{T}u(t)\varphi(t)+\lambda_1\sum_{t=2}^{T}u^2(t)\varphi(t),0\leqslant u\leqslant1;$$

$$\lambda_1\sum_{t=2}^{T}f(u(t))\varphi(t)=\lambda_1\sum_{t=2}^{T}u(t)\varphi(t)+\lambda_1\sum_{t=2}^{T}\varphi(t),u\geqslant1.$$

这与$\sum_{t=2}^{T}\varphi(t)\neq0$或$\sum_{t=2}^{T}u^2(t)\varphi(t)\neq0$产生矛盾.

2　预备知识及主要工具

令$T_1=\{0,1,\cdots,T+1,T+2\}$，定义空间

$$E=\{u:T_1\to\mathbf{R}\,|\,u(0)=u(T+2)=\Delta u(0)=\Delta u(T+1)=0\},$$

则空间E按范数$\|u\|=\max\limits_{t\in T_1}|u(t)|$构成Banach空间. 对任意的$u,v\in E$，记$u\leqslant v$，如果对任意$t\in T_1$，有$u(t)\leqslant v(t)$成立. 对任意给定的$r>0$，记$B_r=\{u\in E:\|u\|<r\}$，$\partial B_r=\{u\in E:\|u\|=r\}$，且$\theta$表示空间$E$中的零元素.

引理1　令$h:T_2\to\mathbf{R}$. 则边值问题

$$\begin{aligned}&\Delta^4u(t-2)=h(t),t\in T_2,\\&u(0)=u(T+2)=\Delta u(0)=\Delta u(T+1)=0\end{aligned}$$

存在解

$$u(t)=\sum_{s=2}^{T}G(t,s)h(s),t\in T_1,\tag{5}$$

其中，

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{s(s-1)(T+1-t)(T+2-t)(3T(t-1)-T(s-2)-2t(s-2))}{6T(T+1)(T+2)},s\leqslant t,\\[2ex]\dfrac{t(t-1)(T+1-s)(T+2-s)(3T(s-1)-T(t-2)-2s(t-2))}{6T(T+1)(T+2)},t\leqslant s.\end{cases}\tag{6}$$

证明 通过简单的和分运算,结合 $u(0)=\Delta u(0)=0$,易得

$$u(t)=\Delta^2u(0)\frac{(t-1)t}{2}+\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\Delta^3u(0)+\sum_{s=2}^{t-1}\frac{(t-s)(t-s-1)(t-s+1)}{6}h(s).$$

又因 $u(T+2)=\Delta u(T+1)=0$,故有

$$\begin{aligned}u(t)&=\sum_{s=2}^{T}\frac{(T+1-s)(T+2-s)t(t-1)[3T(s-1)-T(t-2)-2s(t-2)]}{6T(T+1)(T+2)}h(s)+\\&\quad\sum_{s=2}^{t-1}\frac{(t-s)(t-s-1)(t-s+1)}{6T(T+1)(T+2)}h(s)\\&=\sum_{s=2}^{T}\frac{(T+1-s)(T+2-s)t(t-1)[3T(s-1)-T(t-2)-2s(t-2)]}{6T(T+1)(T+2)}h(s)+\\&\quad\sum_{s=2}^{t-1}\frac{(T+1-t)(T+2-t)s(s-1)[3T(t-1)-T(s-2)-2t(s-2)]}{6T(T+1)(T+2)}h(s),\end{aligned}$$

从而(5)成立.

通过计算,不难证明格林函数 $G(t,s)$ 满足如下性质:

$$G(t,s)\leqslant\Phi(s),s\in T_1,t\in T_1,$$
$$G(t,s)\geqslant c(t)\Phi(s),s\in T_1,t\in T_1,$$

其中,

$$\Phi(s)=\begin{cases}\dfrac{(T+2-s)(T+1-s)s(s-1)^2}{2(T+1)(T+2)},1\leqslant t\leqslant s\leqslant T+1,\\[2ex]\dfrac{(T+2-s)^2(T+1-s)s(s-1)}{2T(T+2)},1\leqslant s\leqslant t\leqslant T+1.\end{cases}$$

$$c(t)=\begin{cases}\dfrac{(T+2-t)(T+1-t)(t-1)}{3(T+1)(T-1)},1\leqslant s\leqslant t\leqslant T+1,\\[2ex]\dfrac{(T+2-t)t(t-1)}{(T+1)T^2},1\leqslant t\leqslant s\leqslant T+1.\end{cases}$$

进一步,记 $\sigma=\dfrac{2}{T(T+1)}$,$G(t,s)$ 满足

$$G(t,s)\geqslant\sigma\Phi(s),\text{对任意的 }s\in T_1,t\in T_2.$$

定义 E 中的锥 P 如下:

$$P=\{u\in E\,|\,u(t)\geqslant0,\min_{t\in T_2}u(t)\geqslant\sigma\|u\|\}.$$

易证问题(1)等价于和分方程

$$u(t)=\lambda\sum_{s=2}^{T}G(t,s)f(s,u(s))=:(\lambda Au)(t),t\in T_1,$$

其中,$G(t,s)$ 如(6)式定义. 问题(1)的正解是指存在一对(λ,μ)满足 $\lambda>0$,$u(t)>0$,$t\in T_2$ 且满足问题(1).

定义算子 L,f: $E\to E$ 如下:

$$Lu(t):=\sum_{s=2}^{T}G(t,s)u(s),t\in T_1,$$
$$(fu)(t):=f(t,u(t)),u\in E,t\in T_2,$$

则 $A=Lf$.

引理2 $A(P)\subset P$ 且 A: $P\to P$ 全连续.

证明 对任意给定的 $u\in P$,有

$$\|Au\|=\max_{t\in T_1}\sum_{s=2}^{T}G(t,s)f(s,u(s))\leqslant\sum_{s=2}^{T}f(s,u(s))\Phi(s),$$

$$\max_{t\in T_2}Au(t)=\min_{t\in T_2}\sum_{s=2}^{T}G(t,s)f(s,u(s))\geqslant\sigma\sum_{s=2}^{T}f(s,u(s))\Phi(s)\geqslant\sigma\|Au\|.$$

故 $A(P)\subset P$. 因 E 为有限维空间，结合 f 的连续性，从而可证 $A:P\to P$ 全连续.

根据引理可知，$u=\{u(t)\}_{t=0}^{T+2}$ 是问题(1)的一个解，当且仅当 $u=\{u(t)\}_{t=0}^{T+2}\in E$ 为算子 λA 的一个不动点. 下面考虑线性特征值问题(3)的谱. 显然，(3)等价于算子方程 $u=\lambda Lu$.

引理 3　算子 L 的谱半径 $r(L)>0$，且存在 $\varphi\in E$ 满足 $\varphi(t)>0, t\in T_2$，使得 $L\varphi=r(L)\varphi$ 且 $\sum_{t=2}^{T}\varphi(t)=\frac{1}{r(L)}$. 进一步，$\lambda_1=\frac{1}{r(L)}$ 为线性特征值问题(3)的第一个正的特征值，且

$$\sum_{s=2}^{T}(Lu)(t)\varphi(t)=\frac{1}{\lambda_1}\sum_{s=2}^{T}u(t)\varphi(t),\ \forall u\in E. \tag{7}$$

证明　定义锥 $P_0=\{u\in E\mid y(t)\geqslant 0, t\in T_1\}$，则 P_0 为一个内部非空的正则锥. 从而 $E=P_0-P_0$，即 P_0 为 E 中的完全锥. 因 $G(t,s)>0,(t,s)\in T_2\times T_2$，故存在 $t_0\in T_2$ 使得 $G(t_0,t_0)>0$，取 $u\in E$ 使得 $u(t)\geqslant 0$，$t\in T_1$，$u(t_0)>0$ 且 $u(t)=0, t\notin T_2$，则对任意的 $t\in T_2$，有

$$Lu(t)=\sum_{s=2}^{T}G(t,s)u(s)\geqslant\sum_{s=2}^{T}G(t_0,s)u(s)>0.$$

从而存在常数 $c>0$，使得对任意的 $t\in T_1$，有 $c(Lu)(t)\geqslant u(t)$. 根据 Krein-Rutman 定理[16]得，谱半径 $r(L)>0$ 且 $\varphi_0\in E$ 满足 $\varphi_0(t)>0, t\in T_2$，使得 $L\varphi_0=r(L)\varphi_0$.

令 $\varphi=\frac{\varphi_0}{r(L)\sum_{t=2}^{T}\varphi_0(t)}$，则 $\varphi(t)>0, t\in T_2, L\varphi=r(L)\varphi$ 且 $\sum_{t=2}^{T}\varphi(t)=\frac{1}{r(L)}$.

注意到，$L\varphi=r(L)\varphi$ 等价于下面边值问题

$$\Delta^4\varphi(t-2)=\frac{1}{r(L)}\varphi(t),\ t\in T_2,\ \varphi(0)=\varphi(T+2)=\Delta\varphi(0)=\Delta\varphi(T+1)=0,$$

则 $\lambda_1=\frac{1}{r(L)}$ 为问题(3)第一个正的特征值.

对任意的 $x,y\in E$，通过计算可得

$$\sum_{s=2}^{T}\Delta^4x(t-2)y(t)=\sum_{s=2}^{T}x(t)\Delta^4y(t-2).$$

令 Lu 为下列边值问题的唯一解

$$\Delta^4u(t-2)=u(t),\ t\in T_2,\ u(0)=u(T+2)=\Delta u(0)=\Delta u(T+1)=0,$$

则

$$\lambda_1\sum_{s=2}^{T}(Lu)(t)\varphi(t)=\sum_{s=2}^{T}(Lu)(t)\Delta^4\varphi(t-2)=\sum_{s=2}^{T}\Delta^4(Lu)(t-2)\varphi(t)=\sum_{s=2}^{T}u(t)\varphi(t).$$

故(7)成立，引理得证.

作者所使用的主要工具:

引理 4[16]　令 E 为 Banach 空间，$P\subset E$ 为 E 中的一个锥，Ω 为 E 中的有界开集. 假设 $A:P\cap\bar{\Omega}\to P$ 全连续. 若存在 $x_0\in P\backslash\{\theta\}$，使得对任意的 $x\in P\cap\partial\Omega,\mu\geqslant 0$，有 $x-Ax\neq\mu x_0$ 成立，则 $i(A,P\cap\Omega,P)=0$.

引理 5[16]　令 E 为 Banach 空间，$P\subset E$ 为 E 中的一个锥，Ω 为 E 中的有界开集. 假设 $A:P\cap\bar{\Omega}\to P$ 全连续. 若对任意的 $x\in P\cap\partial\Omega$ 且 $\mu\geqslant 1$，有 $Ax\neq\mu x$，则 $i(A,P\cap\Omega,P)=1$.

3　主要结果的证明

定理 1 的证明　(i) 对任意给定的 $\lambda\in\left(\frac{\lambda_1}{f_0},\frac{\lambda_1}{f^\infty}\right)$，有 $f_0>\frac{\lambda_1}{\lambda}$ 和 $f^\infty<\frac{\lambda_1}{\lambda}$. 根据 $f_0>\frac{\lambda_1}{\lambda}$ 知，存在 $\varepsilon\in(0,1)$，$r_1>0$，使得

$$f(t,u)\geqslant\frac{\lambda_1}{\lambda}(1+\varepsilon)u,\ \forall u\in[0,r_1],\ t\in T_2.$$

假设 λA 在 $P\cap\partial B_{r_1}$ 中无不动点，若不然，(i) 已证. 下面证明

$$u\neq\lambda Au+\mu\varphi,\forall u\in P\cap\partial B_{r_1},\mu\geqslant 0,\tag{8}$$

其中，φ 由引理3定义.

反设存在 $u_0\in P\cap\partial B_{r_1}$ 且 $\mu_0\geqslant 0$，使得 $u_0=\lambda Au_0+\mu_0\varphi$ 成立. 易见，$\mu_0\geqslant\mu_0\varphi$.

令 $u^*=\sup\{\mu|u_0\geqslant\mu\varphi\}$，则 $u^*>0$ 且 $u_0\geqslant\mu^*\varphi$. 由于 $L(P)\subset P$，可知

$$\lambda_1Lu_0(t)\geqslant\lambda_1Lu^*\varphi(t)=u^*\lambda_1L\varphi(t)=u^*\varphi(t).$$

故

$$u_0=\lambda_1Au_0+u_0\varphi\geqslant\lambda Au_0\geqslant(1+\varepsilon)\lambda_1Lu_0\geqslant(1+\varepsilon)\mu^*\varphi,$$

这与 μ^* 的定义矛盾，从而(8)成立. 根据引理4可得

$$i(A,P\cap B_{r_1},P)=0.\tag{9}$$

由 $f^\infty<\frac{\lambda_1}{\lambda}$ 和 $f(t,u)$ 的连续性知，存在 $\sigma\in(0,1)$ 和常数 $C>0$，使得

$$f(t,u)\leqslant\frac{\lambda_1\sigma}{\lambda}u+C,\forall u\in[0,\infty),t\in T_2.\tag{10}$$

定义

$$W=\{u\in E|u=\mu\lambda Au\text{ 对某些 }\mu\in[0,1]\}.$$

下证 W 为 E 中的有界集.

对任意的 $u\in W$，存在 $\mu\in[0,1]$，使得 $u=\mu\lambda Au$. 由(10)知，$u=\mu\lambda Au\leqslant\lambda_1\sigma Lu+\lambda CLv_0$，其中，$v_0(t)\equiv 1$，$t\in T_2$. 故 $(I-K)u\leqslant CLv_0$，其中，$K=\lambda_1\sigma L$，I 为恒同算子. 因为 $r(K)=\lambda_1\sigma r(L)<1$，所以逆算子 $(I-K)^{-1}$ 存在且可展为 $(I-K)^{-1}=I+K+K^2+\cdots$. 结合 $K(P)\subset P$ 可得，$(I-K)^{-1}(P)\subset P$，从而 $u\leqslant(I-K)^{-1}CLv_0$. 故 W 为有界集. 从而存在 $\mathbf{R}_1>\max\{r_1,\sup_{u\in W}\|u\|\}$，使得 $u\neq\mu\lambda Au,\forall u\in P\cap B_{\mathbf{R}_1},\mu\in[0,1]$.

由引理5知，

$$i(A,P\cap B_{\mathbf{R}_1},P)=1.\tag{11}$$

因此，由(9)和(11)，结合不动点指数的可加性知，

$$i(A,P\cap(B_{\mathbf{R}_1}\backslash\overline{B}_{r_1}),P)=i(A,P\cap B_{\mathbf{R}_1},P)-i(A,P\cap B_{r_1},P)=1.$$

从而 A 在 $P\cap(B_{r_2}\backslash\overline{B}_{r_1})$ 中存在一个不动点，即问题(1)至少存在一个正解.

(ii) 对任意给定的 $\lambda\in(\frac{\lambda_1}{f_\infty},\frac{\lambda_1}{f^0})$，有 $f^0<\frac{\lambda_1}{\lambda}$ 和 $f_\infty>\frac{\lambda_1}{\lambda}$. 根据 $f^0<\frac{\lambda_1}{\lambda}$ 知，存在 $\varepsilon\in[0,1]$，$r_2>0$，使得

$$f(t,u)\leqslant\frac{\lambda_1}{\lambda}(1-\varepsilon)u,\forall u\in[0,r_2],t\in T_2.$$

下面证明

$$u\neq\mu\lambda Au,\forall u\in P\cap\partial B_{r_2},\mu\in[0,1].\tag{12}$$

反设存在 $u_0\in[0,1]$ 且 $u_0\in P\cap\partial B_{r_2}$，使得 $u_0=\mu_0\lambda Au_0$，则

$$u_0(t)\leqslant\lambda(Au_0)(t)\leqslant\sum_{s=2}^{T}G(t,s)f(s,u(s))\leqslant\lambda_1(1-\varepsilon)\sum_{s=2}^{T}G(t,s)u_0(s),t\in T_2.$$

从而 $\lambda_1(1-\varepsilon)Lu_0\geqslant u_0$，给此不等式两边同时乘以 φ，然后从 $t=2$ 到 $t=T$ 求和，结合(7)可得

$$(1-\varepsilon)\sum_{t=2}^{T}u_0(t)\varphi(t)=\lambda_1(1-\varepsilon)\sum_{t=2}^{T}(Lu_0)(t)\varphi(t)\geqslant\sum_{t=2}^{T}u_0(t)\varphi(t).$$

根据 $\sum_{t=2}^{T}u_0(t)\varphi(t)>0$ 可知，$\varepsilon\leqslant 0$，这与 ε 的选取矛盾，故(12)成立. 由引理5知，

$$i(A,P\cap B_{r_2},P)=1.\tag{13}$$

根据 $f_\infty>\frac{\lambda_1}{\lambda}$ 和 $f(t,u)$ 关于 u 的连续性可知，存在常数 $C>0$，使得

$$f(t,u)\geqslant 2\lambda_1\lambda^{-1}u-C,\forall u\geqslant 0,t\in T_2.$$

令 $\Omega=\{u\in P\mid u=\lambda Au+u\varphi$ 对某些 $\mu\geqslant 0\}$，其中，φ 由引理3定义，宣称 Ω 为 E 中有界集.

事实上，对任意的 $u\in\Omega$，存在 $\mu\geqslant 0$，使得 $u=\lambda Au+\mu\varphi\geqslant\lambda Au$，则

$$u(t)\geqslant 2\lambda_1(Lu)(t)-\lambda C(Lv_0)(t),t\in T_1.$$

对上面不等式两边同乘以 φ，然后从 $t=2$ 到 $t=T$ 求和，结合引理4可得

$$\sum_{t=2}^{T}u(t)\varphi(t)\geqslant 2\lambda_1\sum_{t=2}^{T}(Lu)(t)\varphi(t)-\lambda C\sum_{t=2}^{T}(Lv_0)(t)\varphi(t)=2\sum_{t=2}^{T}u(t)\varphi(t)-\lambda C.$$

从而可得 $\sum_{t=2}^{T}u(t)\varphi(t)\leqslant\lambda C$. 令 $\delta=\min_{t\in T_2}\varphi(t)>0$，则 $\|u\|\leqslant\lambda\delta^{-1}C$. 因此 Ω 为 E 中的有界集，宣称成立.

选取 $\mathbf{R}_2>\max\{\sup_{u\in\Omega}\|u\|,r_2\}$，使得

$$u\neq\lambda Au+\mu\varphi,\forall P\cap\partial B_{\mathbf{R}_2},\mu\geqslant 0.$$

结合引理4，可得

$$i(A,P\cap B_{\mathbf{R}_2},P)=0. \tag{14}$$

由(13)和(14)，结合不动点指数的可加性知，

$$i(A,P\cap(B_{\mathbf{R}_2}\backslash\overline{B}_{r_2}),P)=i(A,P\cap B_{\mathbf{R}_2},P)-i(A,P\cap B_{r_2},P)=-1.$$

根据不动点指数理论知，A 在 $P\cap(B_{\mathbf{R}_2}\backslash\overline{B}_{\mathbf{R}_1})$ 中至少存在一个不动点，即问题(1)至少存在一个正解.

参考文献:

[1] Goldberg S. An Introduction to Difference Equations[M]. New York: John Wiley and Sons, 1960: 1－270.

[2] Agarwal R P. Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications[M]. 2nd ed. New York: Marcel Dekker, 2000: 1－1000.

[3] 赵玉萍. 具有连续变量高阶差分方程的振动性[J]. 郑州大学学报: 理学版, 2012, 44(3): 12－15.

[4] 刘雪飞，钟晓珠，许红叶，等. 含有极大值的二阶差分方程的有界振动性和非振动性[J]. 郑州大学学报: 理学版, 2012, 44(2): 39－42.

[5] Cabada A, Iannizzotto A, Tersian S. Multiple solutions for discrete boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 2009, 356(2): 418－428.

[6] Zhang Binggen, Kong Lingju, Sun Yijun, et al. Existence of positive solutions for BVPs of fourth-order difference equations[J]. Appl Math Comput, 2002, 131(2/3): 583－591.

[7] Ma Ruyun, Xu Youji. Existence of positive solution for nonlinear fourth-order difference equations[J]. Comput Math Appl, 2010, 59(12): 3770－3777.

[8] Yuan Chengjun. Positive solutions of a singular positone and semipositone boundary value problems for fourth-order difference equations[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2010, 2010: 1－16.

[9] Agarwal R P, Chow Y M. Iterative methods for a fourth order boundary value problem[J]. Comput Appl Math, 1984, 10(2): 203－217.

[10] 马如云，吴红萍. 一类四阶两点边值问题多个正解的存在性[J]. 数学物理学报, 2002, 22(2): 244－249.

[11] Korman P. Uniqueness and exact multiplicity of solutions for a class of fourth-order semilinear problems[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A, 2004, 134(1): 179－190.

[12] Webb J R L, Infante G, Franco D. Positive solutions of nonlinear fourth-order boundary-value problems with local and nonlocal boundary conditions[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A, 2008, 138(2): 427－446.

[13] Pei M, Chang S. Monotone iterative technique and symmetric positive solutions for a fourth order boundary value problem[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2010, 51(9/10): 1260－1267.

[14] Xu Jia, Han Xiaoling. Nodal solutions for a class of fourth-order two-point boundary value problems[J]. Boundary Value Problems, 2010, 2010: 1－11.

[15] Cabada A, Enguica R R. Positive solutions of fourth order problems with clamped beam boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Method & Applications, 2011, 74(10): 3112－3122.

[16] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985: 224－229.

Existence Criterion of Positive Solutions of a Nonlinear Discrete Fourth-order Boundary Value Problem

LIU Lan, HU Hong

(*College of Mathematics and Physical Sciences*, *Xuzhou Institute of Technology*, *Xuzhou* 221008, *China*)

Abstract: The existence criterion of positive solutions of the nonlinear fourth-order difference equation boundary value problem was obtained:

$$\Delta^4 u(t-2) = \lambda f(t, u(t)), t \in T_2,$$
$$u(0) = u(T+2) = \Delta u(0) = \Delta u(T+1) = 0$$

by using the fixed point index theorem, where $T_2 = \{2, 3, \cdots, T\}$, $f: T_2 \times \mathbf{R} \to [0, \infty)$ was continuous, $T > 4$ and $\lambda > 0$ was a parameter.

Key words: fourth-order difference equation; positive solution; existence; fixed point index

(上接第25页)

Study on Minimum Spanning Tree Algorithm of Matrix

MAO Hua[1], SHI Tian-min[1], GAO Rui[2]

(1. *College of Mathematics and Computer Science*, *Hebei University*, *Baoding* 071002, *China*;
2. *Department of Mathematics*, *Cangzhou Normal University*, *Cangzhou* 061001, *China*)

Abstract: Minimum spanning tree problem was common in operation research for network optimization. A new minimum spanning tree algorithm of matrix was put forward. This algorithm was simple to understand and could be easily done with computer.

Key words: minimum spanning tree; network optimization; matrix algorithm