

模糊技能多映射的变精度模型与构建知识结构的矩阵方法

杨竞菁^{1,2,3}, 李进金^{1,4}, 王鸿伟^{1,2,3}

(1. 泉州师范学院 数学与计算机科学学院 福建 泉州 362000; 2. 泉州师范学院 福建省大数据管理
新技术与知识工程重点实验室 福建 泉州 362000; 3. 泉州师范学院 智能计算与信息处理
福建省高校重点实验室 福建 泉州 362000; 4. 闽南师范大学
数学与统计学院 福建 漳州 363000;)

摘要: 基于变精度 α -模型构建知识结构是当前研究的热点之一。根据阈值取值范围的不同拓展了三种基于模糊技能多映射的变精度能力模型, 讨论了它们所构建的知识结构的性质, 并证明了由它们构建的知识结构族是一致的。在此基础上, 提出基于模糊技能多映射构建知识结构的矩阵方法, 并通过实验验证了方法的可行性和有效性, 分析了模糊技能多映射中问题数、技能数对算法执行时间和空间的影响。

关键词: 知识空间; 知识结构; 模糊技能多映射; 变精度能力模型

中图分类号: TP182

文献标志码: A

文章编号: 1671-6841(2025)05-0078-10

DOI: 10.13705/j.issn.1671-6841.2024151

Variable Precision Model of Fuzzy Skill Multimaps and a Matrix Approach to Constructing Knowledge Structure

YANG Jingjing^{1,2,3}, LI Jinjin^{1,4}, WANG Hongwei^{1,2,3}

(1. *School of Mathematics and Computer Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China;*
2. *Key Laboratory of New Technologies and Knowledge Engineering for Big Data Management of Fujian Province, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China;* 3. *Fujian University Laboratory of Intelligent Computing and Information Processing, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China;*
4. *School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China*)

Abstract: Constructing knowledge structures based on variable precision α -models is one of the current research hotspots. Three types of variable precision competence models based on fuzzy skill multimaps with different threshold value ranges were extended, and the properties of the knowledge structures constructed by the models were discussed. It was proved that the knowledge structure families constructed were consistent. Based on this, a matrix approach for constructing knowledge structures based on fuzzy skill multimaps was proposed, and the feasibility and effectiveness of the method were verified by experiments. Furthermore, how the numbers of problems and skills in fuzzy skill multimaps affected the method's running time and space complexity was discussed.

Key words: knowledge space; knowledge structure; fuzzy skill multimaps; variable precision competency model

收稿日期: 2024-08-30

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12271191, 11871259); 福建省自然科学基金项目 (2023J01122, 2023J01125, 2023J05175, 2022J01306, 2022J05169)

第一作者: 杨竞菁 (1976—), 女, 讲师, 主要从事知识空间理论、机器学习研究, E-mail: panday2@126.com。

通信作者: 李进金 (1960—), 男, 教授, 主要从事粗糙集、概念格、知识空间理论研究, E-mail: jinjinli@mnnu.edu.cn。

0 引言

随着人工智能技术的快速发展及现代教育的需要,个性化学习及指导的相关研究已得到了广泛重视。其中知识空间理论(knowledge space theory, KST)^[1]是数学心理学的重要分支,旨在评估个体对学习内容的掌握情况进行学习指导。该理论被应用于数学、物理、化学、医学等学科^[2-3],且已在自适应学习平台 ALEKS 上进行应用^[4]。近年来,研究者在原 KST 的基础上发展出基于能力的知识空间理论(competence based KST, CbKST)^[5],以描述和理解个体在特定知识领域的能力发展和知识获取过程。为方便,本文后面的描述中将 CbKST 也称为 KST。

在 KST 中,构建知识结构是核心问题之一,也是进一步规划学习路径的前提和基础。已有研究者从不同的角度研究了知识结构的构建。如李进金等^[6]通过知识基建立了知识空间和形式背景之间的联系,给出了构建知识结构的一种方法。周银凤等^[7]运用形式概念分析的方法,基于技能函数,寻找学习路径并进行技能评估。Liu^[8]将粗糙集中的上下近似算子与技能映射和技能多映射建立联系,提出构建知识结构的方法。Sun 等^[9]在知识空间中引入模糊集理论,提出了基于模糊技能映射和模糊技能多映射构建知识结构的理论。

在 KST 中由技能映射诱导知识结构有三种基本模型,即析取模型、合取模型和能力模型^[10]。直接使用这些模型构建知识结构则条件过于宽松或苛刻。杨桃丽等^[11]引入了技能包含度和能力包含度的概念,建立了构建知识结构的变精度 α -模型和变精度 α -能力模型,在一定程度上解决了构建条件过于宽松或苛刻的问题,但未对每个技能的熟练程度进行刻画。因此 Xu 等^[12]提出模糊技能包含度和模糊能力包含度的概念,建立了基于模糊技能映射的变精度 α -模型和基于模糊技能多映射的变精度 α -能力模型。但模型中的 α 阈值取值范围为 $(0,1]$,如果阈值取值范围不同,模型应如何变化?变化的模型诱导的知识结构族与原有模型诱导的知识结构族有什么区别?另外,在文献^[12]中未介绍构建知识结构的具体算法。基于这些问题,本文讨论了当阈值取值为两种不同区间时,提出的三种基于模糊技能多映射的变精度能力模型及它们之间的联系,最后给出基于模糊技能多映射构建知识结构的

的矩阵算法,并进行了实验验证。

1 预备知识

对文中涉及的基本概念进行介绍。

定义 1^[1] 设 Q 为非空有限问题集, \mathcal{K} 是由 Q 的子集构成的集族,若 \mathcal{K} 中至少包含 \emptyset 和 Q ,则称 (Q, \mathcal{K}) 为知识结构。 \mathcal{K} 中的元素 K (K 为 Q 的子集)称为知识状态。

设 (Q, \mathcal{K}) 是一个知识结构,若 $\forall K_i, K_j \in \mathcal{K}$, 有 $K_i \cup K_j \in \mathcal{K}$, 则称 (Q, \mathcal{K}) 为知识空间;若 $\forall K_i, K_j \in \mathcal{K}$, 有 $K_i \cap K_j \in \mathcal{K}$, 则称 (Q, \mathcal{K}) 为简单闭包空间。若 (Q, \mathcal{K}) 既是知识空间又是简单闭包空间,则称 (Q, \mathcal{K}) 为拟序空间。 \cup 、 \cap 是指分明集中的并和交运算。

若 S 为一个非空有限技能集, S 上的模糊集合 $F(S)$ 为所有从 S 到区间 $[0,1]$ 映射的集合,即 $F(S) = \{T \mid T: S \rightarrow [0,1]\}$ 。为方便,记 $T: S \rightarrow [0,1]$ 为 $T = \left\{ \frac{T(s)}{s} : s \in S \right\} \in F(S)$, $T(s)$ 表示技能 s 对 T 的隶属度。对于某个技能 s , 有 $T(s) = 0$ 则忽略 $\frac{0}{s}$ 。基于 $F(S)$ 的一些运算的定义^[9]为

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1(s) = T_2(s), \forall s \in S;$$

$$T_1 \subseteq T_2 \Leftrightarrow T_1(s) \leq T_2(s), \forall s \in S;$$

$$(T_1 \cup T_2)(s) \Leftrightarrow T_1(s) \vee T_2(s), \forall s \in S;$$

$$(T_1 \cap T_2)(s) \Leftrightarrow T_1(s) \wedge T_2(s), \forall s \in S.$$

定义 2^[9] 三元组 (Q, S, μ) 为一个模糊技能多映射, Q 为非空有限问题集, S 为非空有限技能集, μ 为由 Q 到 $2^{F(S)} \setminus \{\emptyset\}$ 的映射。

模糊技能多映射有两种特殊的情形,对应于模糊技能多映射的析取模型和合取模型。设 (Q, S, μ) 为模糊技能多映射, $\forall q \in Q$, 若每个 $C \in \mu(q)$ 是单个模糊技能构成的集合,可表示为 $C = \left\{ \frac{\tau_q(s)}{s} \right\}$, 这里 $\tau_q(s)$ 表示解决问题 q 要求技能 s 的最低熟练程度,则 (Q, S, μ) 对应于模糊技能多映射的析取模型。若 $\forall q \in Q$, 有 $\mu(q) = \{C\}$, 其中 $C \in F(S)$, 则 (Q, S, μ) 对应于模糊技能多映射的合取模型。在合取模型下,特别地,可将 (Q, S, μ) 视为模糊技能映射。

注 1 在文献^[9]中基于模糊技能映射定义了 $F(S)$ 上的等价关系,则基于模糊技能多映射 (Q, S, μ) 定义 $F(S)$ 上的等价关系如下。

设 (Q, S, μ) 为一模糊技能多映射,且 $s \in S$,

$C_q \in \mu(q)$, 将 $\{C_q(s) \in (0,1]: q \in Q\}$ 中的所有元素按数值大小排序后记为

$$\{C_1^s, C_2^s, \dots, C_i^s, \dots, C_{n_s}^s\},$$

其中:

$$0 < C_1^s < C_2^s < \dots < C_i^s \dots < C_{n_s}^s \leq 1,$$

$$n_s = |\{C_q(s) \in (0,1]: q \in Q\}|.$$

$$\text{为方便, 定义 } a_i^s = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ C_i^s, & 1 \leq i \leq n_s. \end{cases}$$

则对于任意 $T \in F(S)$, 称 $T(s)$ 近似于 a_i^s , 当且仅当满足下面两个条件,

$$1) 0 \leq i \leq n_s - 1 \text{ 且 } T(s) \in [a_i^s, a_{i+1}^s);$$

$$2) i = n_s \text{ 且 } T(s) \in [a_{n_s}^s, 1].$$

对于 $T, T' \in F(S)$, T 近似于 T' , 记为 $T \sim T'$, 当且仅当 $\forall s \in S, T(s)$ 近似于 $T'(s)$; 对于任意 $T \in F(S)$, 所有与 T 近似的 T' 构成的集合 $\{T': T' \sim T, T' \in F(S)\}$, 记为 $[T]$, 而所有 $[T]$ 构成的集合 $\{[T]: T \in F(S)\}$ 记为 $F(S)/\sim$. $F(S)/\sim$ 为有限集。

定义 3^[12] 设三元组 (Q, S, μ) 为模糊技能多映射, 对 $q \in Q, C_q \in \mu(q), T \in F(S)$, 称

$$D(T/C_q) = \frac{|\{s \in S \mid 0 < C_q(s) \leq T(s)\}|}{|\{s \in S \mid C_q(s) > 0\}|}$$

为问题 q 关于 C_q 和 T 的模糊能力包含度, 记为 $\mu_{C_q}^T$ 。

若 (Q, S, μ) 的所有能力构成的集合为

$$\mathcal{C} = \{C_q \mid C_q \in \mu(q), q \in Q\},$$

则 $D(\mu) = \{\mu_{C_q}^T \mid C_q \in \mathcal{C}, T \in F(S)\}$, 称为模糊技能多映射 (Q, S, μ) 的模糊能力包含度集。

注 2 由于 $F(S)/\sim$ 为有限集, 对于 $[T] \in F(S)/\sim, T_1, T_2 \in [T]$, 有 $\mu_{C_q}^{T_1} = \mu_{C_q}^{T_2}$, 则模糊技能多映射 (Q, S, μ) 的模糊能力包含度集 $D(\mu)$ 也是有限集。因此可以将模糊能力包含度集表示为 $D(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n\}$, 其中 $0 = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n = 1$ 。

关于模糊能力包含度有如下结论^[12]:

1) 如 $\exists C \in \mathcal{C}$, 其中 $|\{s \in S \mid C(s) > 0\}|$ 为偶数, 则 $|D(\mu)|$ 为奇数且 $\beta_{n+1} = \frac{1}{2}$;

2) 如对于 $\forall C \in \mathcal{C}, |\{s \in S \mid C(s) > 0\}|$ 为奇数, 则 $|D(\mu)|$ 为偶数且 $\frac{1}{2} \notin D(\mu)$;

$$3) \beta_i + \beta_{n-i+1} = 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

由于模糊技能映射可视为模糊技能多映射 (Q, S, μ) 在合取模型下的特殊情况, 则定义 3 也适用

于模糊技能包含度的计算。在后面的描述中都统一称为模糊能力包含度。

定义 4^[12] 设三元组 (Q, S, μ) 为一个模糊技能多映射, 对于 $\alpha \in (0,1), T \in F(S)$, 称 $K_T^\alpha = \{q \in Q \mid \exists C_q \in \mu(q): \mu_{C_q}^T \geq \alpha\}$ 为由 T 通过模糊技能多映射的变精度 α -能力模型诱导的知识状态。而 $\mathcal{K}^\alpha = \{K_T^\alpha \mid T \in F(S)\}$ 是由知识状态 K_T^α 构成的知识结构。

2 模糊技能多映射的变精度能力模型

由于基于模糊技能多映射的 α -变精度能力模型中, α 的取值区间为 $(0,1]$, 这里若取 $\alpha = 0, \forall T \in F(S), K_T^\alpha = K_T^0 = Q$, 该模型无法构建知识结构。那么当 α 取 0 或 1 时, 如构建知识结构, 模型应如何变化? 对知识结构有哪些影响? 本节分别对阈值取值区间为 $[0,1)$ 时的一种模型和取值区间为 $(0,1)$ 时的两种模型进行定义, 并对这些变精度能力模型诱导的知识结构的性质及各能力模型之间的联系进行讨论。为区别 α -变精度能力模型, 将新构建的模型分别称为基于模糊技能多映射的变精度 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -能力模型。

定义 5 设 (Q, S, μ) 为一个模糊技能多映射, 对 $q \in Q, C_q \in \mu(q), T \in F(S), \mu_{C_q}^T$ 是问题 q 关于 C_q 和 T 的模糊能力包含度。则当 $\gamma_1 \in [0,1), \gamma_2 \in (0,1), \gamma_3 \in (0,1)$ 时, T 通过变精度 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -能力模型诱导的知识状态分别为

$$L_T^{\gamma_1} = \{q \in Q \mid \exists C_q \in \mu(q): \mu_{C_q}^T > \gamma_1\}, \quad (1)$$

$$H_T^{\gamma_2} = \{q \in Q \mid \exists C_q \in \mu(q): \mu_{C_q}^T > \gamma_2\}, \quad (2)$$

$$G_T^{\gamma_3} = \{q \in Q \mid \exists C_q \in \mu(q): \mu_{C_q}^T \geq \gamma_3\}. \quad (3)$$

定理 1 设三元组 (Q, S, μ) 为一个模糊技能多映射, 则

$$\mathcal{L}^{\gamma_1} = \{L_T^{\gamma_1} \mid T \in F(S)\},$$

$$\mathcal{H}^{\gamma_2} = \{H_T^{\gamma_2} \mid T \in F(S)\},$$

$$\mathcal{G}^{\gamma_3} = \{G_T^{\gamma_3} \mid T \in F(S)\},$$

均为知识结构, 其中: $\gamma_1 \in [0,1); \gamma_2, \gamma_3 \in (0,1)$ 。

证明 根据定义 5, 当 $T = \{\frac{0}{s}: s \in S\}$ 时, $\forall q \in Q, \mu_{C_q}^T = 0$, 则对任意的 $\gamma_1 \in [0,1), \gamma_2, \gamma_3 \in (0,1)$, 有 $L_T^{\gamma_1} = H_T^{\gamma_2} = G_T^{\gamma_3} = \emptyset$ 。

当 $T = \{\frac{1}{s}: s \in S\}$ 时, $\forall q \in Q, \mu_{C_q}^T = 1$, 则对任意的 $\gamma_1 \in [0,1), \gamma_2, \gamma_3 \in (0,1)$, 有 $L_T^{\gamma_1} = H_T^{\gamma_2} = G_T^{\gamma_3}$

$= Q$ 。因此, $\mathcal{L}^{\gamma_1}, \mathcal{H}^{\gamma_2}, \mathcal{G}^{\gamma_3}$ 均为知识结构。

若 (Q, S, μ) 为一个模糊技能多映射, $D(\mu) = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}, 0 = \beta_1 < \dots < \beta_n = 1$, 为模糊能力包含度集, 则在变精度 α -能力模型中, 对任意的 $\alpha \in (\beta_i, \beta_{i+1}], 1 \leq i \leq (n-1)$ 有 $\mathcal{K}^\alpha = \mathcal{K}^{\beta_{i+1}}$ 。因此可以通过选取 $\beta_2 \sim \beta_n$ 不同包含度值作为阈值去构建不同的知识结构。这在文献[12]中已有说明。

类似地, 对于变精度 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -能力模型有定理2。

定理2 设 (Q, S, μ) 为一个模糊技能多映射, $D(\mu) = \{\beta_1, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n\}$ 为模糊能力包含度集, 则结论1)~3)成立:

- 1) 当 $\gamma_1 \in [\beta_i, \beta_{i+1}), 1 \leq i \leq (n-1)$ 时, 有 $\mathcal{L}^{\gamma_1} = \mathcal{L}^{\beta_i}$;
- 2) 当 $\gamma_2 \in [\beta_i, \beta_{i+1}), 2 \leq i \leq (n-1)$ 时, 有 $\mathcal{H}^{\gamma_2} = \mathcal{H}^{\beta_i}$;
- 3) 当 $\gamma_3 \in (\beta_i, \beta_{i+1}], 1 \leq i \leq (n-2)$ 时, 有 $\mathcal{G}^{\gamma_3} = \mathcal{G}^{\beta_{i+1}}$ 。

证明 1) 当 $\gamma_1 \in [\beta_i, \beta_{i+1}), 1 \leq i \leq (n-1)$ 时, $\forall T \in F(S)$ 有

$$L_T^{\gamma_1} \subseteq L_T^{\beta_i} = \{q \in Q \mid \exists C_q \in \mu(q) : \mu_{C_q}^T > \beta_i\}。$$

而 β_i 和 β_{i+1} 之间没有其他包含度值, 则

$$L_T^{\gamma_1} = L_T^{\beta_i},$$

因此 $\mathcal{L}^{\gamma_1} = \mathcal{L}^{\beta_i}$ 。

用1)的方法易证2)和3)成立。

注3 由于取值的特殊性, 定理2的2)中未考虑 $\gamma_2 \in (\beta_1, \beta_2)$ 的情况, 定理2的3)中未考虑 $\gamma_3 \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$ 的情况。当 $\gamma_2 \in (\beta_1, \beta_2)$ 时, 由模糊技能子集 T 通过模糊技能多映射的 γ_2 -能力模型诱导的知识状态记为 $H_T^{\gamma_2^1}$, 对应的知识结构记为 $\mathcal{H}^{\gamma_2^1}$ 。当 $\gamma_3 \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$ 时, 由模糊技能子集 T 通过模糊技能多映射的 γ_3 -能力模型诱导的知识状态记为 $G_T^{\gamma_3^n}$, 对应的知识结构记为 $\mathcal{G}^{\gamma_3^n}$ 。

定理3 设 (Q, S, μ) 为一个模糊技能多映射, $D(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n\}$ 为模糊能力包含度集, 则有

- 1) $\mathcal{K}^{\beta_{i+1}} = \mathcal{L}^{\beta_i}, 1 \leq i \leq (n-1)$,
- 2) $\mathcal{L}^{\beta_i} = \mathcal{H}^{\beta_i}, 2 \leq i \leq (n-1)$,
- 3) $\mathcal{L}^{\beta_i} = \mathcal{G}^{\beta_{i+1}}, 1 \leq i \leq (n-2)$ 。

证明 1) $\forall q \in Q, T \in F(S)$, 当 $1 \leq i \leq (n-1)$, 由定义4, 有

$$K_T^{\beta_{i+1}} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \mu_{C_q}^T \geq \beta_{i+1}\},$$

由于 β_i 与 β_{i+1} 之间没有其他能力包含度值, 则

$$K_T^{\beta_{i+1}} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \mu_{C_q}^T > \beta_i\}。$$

由定义5, 有

$$L_T^{\beta_i} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \mu_{C_q}^T > \beta_i\} = K_T^{\beta_{i+1}},$$

又由 $K_T^{\beta_{i+1}} \in \mathcal{K}^{\beta_{i+1}}, L_T^{\beta_i} \in \mathcal{L}^{\beta_i}$, 因此, $\mathcal{K}^{\beta_{i+1}} = \mathcal{L}^{\beta_i}, 1 \leq i \leq (n-1)$ 。

用类似的方法也可以证明2)和3)成立。

注4 由注2, 当 $\gamma_2 \in (\beta_1, \beta_2)$ 时, 由于 β_1 与 β_2 之间没有其他包含度值, $\forall T \in F(S)$, 有

$$H_T^{\gamma_2^1} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \mu_{C_q}^T > \gamma_2^1\} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \mu_{C_q}^T > \beta_1\} = L_T^{\beta_1},$$

因此, $\mathcal{L}^{\beta_1} = \mathcal{H}^{\gamma_2^1}$ 。

当 $\gamma_3 \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$ 时, 由于 β_{n-1} 与 β_n 之间没有其他包含度值, $\forall T \in F(S)$, 有

$$G_T^{\gamma_3^n} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \mu_{C_q}^T \geq \gamma_3^n\} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \mu_{C_q}^T > \beta_{n-1}\} = L_T^{\beta_{n-1}},$$

因此, $\mathcal{L}^{\beta_{n-1}} = \mathcal{G}^{\gamma_3^n}$ 。

将基于模糊技能多映射的变精度 α -能力模型和变精度 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -能力模型构建的知识结构族分别记为

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_\alpha &= \{\mathcal{K}^\alpha \mid \alpha \in (0, 1)\}, \mathbb{K}_{\gamma_1} = \{\mathcal{L}^{\gamma_1} \mid \gamma_1 \in [0, 1)\}, \\ \mathbb{K}_{\gamma_2} &= \{\mathcal{H}^{\gamma_2} \mid \gamma_2 \in (0, 1)\}, \mathbb{K}_{\gamma_3} = \{\mathcal{G}^{\gamma_3} \mid \gamma_3 \in (0, 1)\}。 \end{aligned}$$

由定理2及注3, 可将 $\mathbb{K}_\alpha, \mathbb{K}_{\gamma_1}, \mathbb{K}_{\gamma_2}, \mathbb{K}_{\gamma_3}$ 分别记为

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_\alpha &= \{\mathcal{K}^{\beta_2}, \dots, \mathcal{K}^{\beta_{i+1}}, \dots, \mathcal{K}^{\beta_n}\}, \\ \mathbb{K}_{\gamma_1} &= \{\mathcal{L}^{\beta_1}, \dots, \mathcal{L}^{\beta_i}, \dots, \mathcal{L}^{\beta_{n-1}}\}, \\ \mathbb{K}_{\gamma_2} &= \{\mathcal{H}^{\gamma_2^1}, \mathcal{H}^{\beta_2}, \dots, \mathcal{H}^{\beta_i}, \dots, \mathcal{H}^{\beta_{n-1}}\}, \\ \mathbb{K}_{\gamma_3} &= \{\mathcal{G}^{\beta_2}, \dots, \mathcal{G}^{\beta_{i+1}}, \dots, \mathcal{G}^{\beta_{n-1}}, \mathcal{G}^{\gamma_3^n}\}, \end{aligned}$$

其中: $\gamma_2^1 \in (\beta_1, \beta_2); \gamma_3^n \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$ 。

定理4 设三元组 (Q, S, μ) 为一个模糊技能多映射, 基于模糊技能多映射的变精度 α -能力模型和变精度 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -能力模型构建的知识结构族分别为: $\mathbb{K}_\alpha, \mathbb{K}_{\gamma_1}, \mathbb{K}_{\gamma_2}, \mathbb{K}_{\gamma_3}$, 则有

$$\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}_{\gamma_1} = \mathbb{K}_{\gamma_2} = \mathbb{K}_{\gamma_3}。$$

易证定理4成立。

由于模糊技能映射可以看作是模糊技能多映射在合取模型下的特殊情况。在文献[12]中已证明当 $\alpha \in (0, \beta_2]$ 时, 模糊技能映射通过变精度 α -模型诱导的是知识空间, 而当 $\alpha \in (\beta_{n-1}, 1]$ 时, 模糊技能映射通过变精度 α -模型诱导的是简单闭包空间。模糊技能多映射在合取模型下通过变精度能力

模型诱导知识结构也有类似的结论。

定理 5 设三元组 (Q, S, μ) 为模糊技能多映射。其中 $\forall q \in Q$, 有 $\mu(q) = \{C\}, C \in F(S)$ 。 $D(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 为模糊能力包含度集, 其中 $0 = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n = 1, \mathcal{K}^\alpha$ 为模糊技能多映射 μ 通过变精度 α -模型诱导的知识结构, 则有

- 1) 当 $\alpha \in (0, \beta_2]$ 时, \mathcal{K}^α 是一个知识空间;
- 2) 当 $\alpha \in (\beta_{n-1}, 1]$ 时, \mathcal{K}^α 是一个简单闭包空间。

该定理的证明与文献[12]类似, 故不列出。

对于模糊技能多映射在合取模型下通过变精度 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -能力模型诱导知识结构也有如下推论。

推论 1 设三元组 (Q, S, μ) 为模糊技能多映射, 其中 $\forall q \in Q$, 有 $\mu(q) = \{C\}, C \subseteq F(S)$ 。 $D(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}, 0 = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n = 1$ 为能力包含度集, \mathcal{L}^{γ_1} 为模糊技能多映射 μ 通过变精度 γ_1 -能力模型诱导的知识结构, \mathcal{H}^{γ_2} 为模糊技能多映射 μ 通过变精度 γ_2 -能力模型诱导的知识结构, \mathcal{G}^{γ_3} 为模糊技能多映射 μ 通过变精度 γ_3 -能力模型诱导的知识结构, 则有

- 1) 当 $\gamma_1 \in [0, \beta_2), \gamma_2 \in (0, \beta_2), \gamma_3 \in (0, \beta_2]$ 时, $\mathcal{L}^{\gamma_1}, \mathcal{H}^{\gamma_2}, \mathcal{G}^{\gamma_3}$ 均为知识空间;
- 2) 当 $\gamma_1 \in [\beta_{n-1}, 1), \gamma_2 \in [\beta_{n-1}, 1), \gamma_3 \in (\beta_{n-1}, 1)$ 时, $\mathcal{L}^{\gamma_1}, \mathcal{H}^{\gamma_2}, \mathcal{G}^{\gamma_3}$ 均为简单闭包空间。

易证推论 1 成立。

$\forall T \in F(S), C \in \mathcal{C}, \mathcal{C}$ 是模糊技能多映射 (Q, S, μ) 中所有能力的集合。 $D(T/C)$ 是关于 T 和 C 的模糊技能包含度。沿用文献[12]中记

$$\bar{D}(T/C) = 1 - D(T/C) = \frac{|\{s \in S \mid C(s) > T(s)\}|}{|\{s \in S \mid C(s) > 0\}|},$$

则

$$\bar{D}(\mu) = \{\bar{D}(T/C) \mid C \in \mathcal{C}, T \in F(S)\} = \{1 - D(T/C) \mid C \in \mathcal{C}, T \in F(S)\},$$

因为 $D(\mu) = \{D(T/C) \mid C \in \mathcal{C}, T \in F(S)\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$,

且 $\beta_i + \beta_{n-i+1} = 1, i = 1, 2, \dots, n$, 因此

$$\bar{D}(\mu) = D(\mu).$$

注 5 在文献[12]中, 基于模糊技能多映射 μ 的变精度 α -能力模型定义

$$\bar{K}_T^\alpha = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \bar{D}(T/C) \geq \alpha\}.$$

当 $T = \{\frac{0}{s} : s \in S\}$ 时, $\bar{K}_T^\alpha = Q$; 当 $T = \{\frac{1}{s} : s \in S\}$ 时, $\bar{K}_T^\alpha = \emptyset$; 则 $\mathcal{K}^\alpha = \{\bar{K}_T^\alpha \mid T \in F(S)\}$ 是知识结

构。类似地, 基于模糊技能多映射 (Q, S, μ) 的变精度 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -能力模型可分别定义

$$\begin{aligned} \bar{L}_T^{\gamma_1} &= \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \bar{D}(T/C) > \gamma_1\}, \\ \bar{H}_T^{\gamma_2} &= \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \bar{D}(T/C) > \gamma_2\}, \\ \bar{G}_T^{\gamma_3} &= \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \bar{D}(T/C) \geq \gamma_3\}. \end{aligned}$$

易证 $\mathcal{L}^{\gamma_1} = \{\bar{L}_T^{\gamma_1} \mid T \in F(S)\}, \mathcal{H}^{\gamma_2} = \{\bar{H}_T^{\gamma_2} \mid T \in F(S)\}, \mathcal{G}^{\gamma_3} = \{\bar{G}_T^{\gamma_3} \mid T \in F(S)\}$ 均为知识结构。

由于对模糊技能多映射 (Q, S, μ) , 若 $\forall q \in Q$, 有 $\mu(q) = \{C\}, C \in F(S)$ 。模糊能力包含度集为 $D(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}, 0 = \beta_1 < \dots < \beta_n = 1$, 则对于变精度 α -能力模型有如下结论^[12],

$\bar{K}^{\beta_{n-i+1}}$ 与 \mathcal{K}^α 互为对偶, 其中 $\alpha \in (\beta_i, \beta_{i+1}], 1 \leq i \leq (n-1)$ 。特别地, 当 $\alpha \in (\beta_1, \beta_2]$ 时, $\bar{K}^{\beta_n} = \bar{K}^1$ 与 \mathcal{K}^α 互为对偶; 当 $\alpha \in (\beta_{n-1}, \beta_n]$ 时, \bar{K}^{β_2} 与 \mathcal{K}^α 互为对偶。

则对于模糊变精度 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -能力模型也有如下推论。

推论 2 设 (Q, S, μ) 为模糊技能多映射, 其中 $\forall q \in Q$, 有 $\mu(q) = \{C\}, C \in F(S)$ 。 $D(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 为模糊能力包含度集, $0 = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n = 1$, 则有

1) $\mathcal{L}^{\beta_i} = \{\bar{L}_T^{\beta_i} \mid T \in F(S)\}$ 与 $\mathcal{L}^{\beta_{n-i}}$ 互为对偶, $1 \leq i \leq (n-1)$ 。特别地, \mathcal{L}^{β_1} 与 $\mathcal{L}^{\beta_{n-1}}$ 互为对偶; $\mathcal{L}^{\beta_{n-1}}$ 与 \mathcal{L}^{β_1} 互为对偶。

2) $\mathcal{H}^{\beta_i} = \{\bar{H}_T^{\beta_i} \mid T \in F(S)\}$ 与 $\mathcal{H}^{\beta_{n-i}}$ 互为对偶, $2 \leq i \leq (n-2)$ 。另外, $\mathcal{H}^{\gamma_2^1}$ 与 $\mathcal{H}^{\beta_{n-1}}$ 互为对偶; $\mathcal{H}^{\beta_{n-1}}$ 与 $\mathcal{H}^{\gamma_2^1}$ 互为对偶, $\gamma_2^1 \in (\beta_1, \beta_2)$ 。

3) $\mathcal{G}^{\beta_i} = \{\bar{G}_T^{\beta_i} \mid T \in F(S)\}$ 与 $\mathcal{G}^{\beta_{n-i+2}}$ 互为对偶, 其中 $3 \leq i \leq (n-1)$ 。另外, $\mathcal{G}^{\gamma_3^1}$ 与 \mathcal{G}^{β_2} 互为对偶; \mathcal{G}^{β_2} 与 $\mathcal{G}^{\gamma_3^1}$ 互为对偶, $\gamma_3^1 \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$ 。

证明 1) 由注 5 知, $\bar{L}_T^{\beta_i} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \bar{D}(T/C) > \beta_i\}$, 则 $\bar{L}_T^{\beta_i}$ 的对偶知识状态为 $Q \setminus \bar{L}_T^{\beta_i} = Q \setminus \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : \bar{D}(T/C) > \beta_i\} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : D(T/C) \geq 1 - \beta_i\}$ 。

由于模糊能力包含度集 $D(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 中, $\beta_i + \beta_{n-i+1} = 1, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $1 - \beta_i = \beta_{n-i+1}$ 。 $Q \setminus \bar{L}_T^{\beta_i} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : D(T/C) \geq \beta_{n-i+1}\} = \{q \in Q \mid \exists C \in \mu(q) : D(T/C) > \beta_{n-i}\} = \bar{L}_T^{\beta_{n-i}}$ 。

则 \mathcal{L}^{β_i} 与 $\mathcal{L}^{\beta_{n-i}}$ 互为对偶, $1 \leq i \leq (n-1)$ 。特别地, 当 $i = 1$ 时, \mathcal{L}^{β_1} 与 $\mathcal{L}^{\beta_{n-1}}$ 互为对偶; 当 $i = (n-$

题 q_x 关于 $[T_l]$ 的模糊能力包含度为

$$\mu_{hC_{q_x}}^{T_l} = \frac{\omega_x^h \lambda_{T_l}}{|C_{q_x}|}。$$

证明 根据 ω_x^h 和 λ_{T_l} 所表示向量的意义, 易证 $\omega_x^h \lambda_{T_l} = |\{s \in S \mid 0 < C_{q_x}(s) \leq T_l(s)\}|$ 。

推论 3 由定理 6, 对于模糊技能映射 τ_h 关于 $[T_l]$ 的能力包含度矩阵为

$$D^h = \begin{bmatrix} \frac{1}{|C_{q_1}|} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{|C_{q_x}|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{|C_{q_n}|} \end{bmatrix} M^h P =$$

$(\mu_{hC_{q_x}}^{T_l})。$

例 4 应用例 2、例 3 的计算结果, 计算模糊技能映射 τ_1 关于 $[T_l]$ 的模糊能力包含度矩阵为

$$D^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^1 P,$$

其中: P 和 M^1 分别与例 2 和例 3 中的一致。

计算得

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

记号 4 计算所有的 D^h , 将各矩阵中对应的 $\mu_{hC_{q_x}}^{T_l}$ 取最大值作为最终的关于 μ 的模糊能力包含度矩阵, 记为 $D = \max(\mu_{hC_{q_x}}^{T_l} \mid h = 1, 2, \dots, p)$ 。

D 中每列对应的是在 μ 上 $[T_l]$ 关于 Q 中所有问题的模糊能力包含度, 将每个模糊能力包含度值与模型阈值 γ_1 比较, 就能获取 $[T_l]$ 通过变精度 γ_1 -能力模型诱导的知识状态。

定义 6 设 (Q, S, μ) 为模糊技能多映射, $D = (\mu_{C_{q_x}}^{T_l})$ 为基于 μ 的模糊能力包含度矩阵, 称 $B^{\gamma_1} = (b_{xl})$ 为模糊技能多映射 μ 通过变精度 γ_1 -能力模型构建知识结构的余矩阵, 其中

$$b_{xl} = \begin{cases} 1, & \mu_{C_{q_x}}^{T_l} > \gamma_1, \\ 0, & \mu_{C_{q_x}}^{T_l} \leq \gamma_1。 \end{cases}$$

将余矩阵 B^{γ_1} 中相同的列保留其一, 其余删去, 得到约简后的余矩阵 B^{γ_1} , 即可由 B^{γ_1} 构建知识结构。根据 D 中所有能力包含度值, 可构建能力包含度集 $D(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, 分别计算 γ_1 不同取值时的知识结构, 即可得基于模糊技能多映射的通过变精度 γ_1 -能力模型构建的知识结构族。

下面给出由变精度 γ_1 -能力模型构建知识结构的算法。

算法 1 基于模糊技能多映射 (Q, S, μ) 通过变精度 γ_1 -能力模型构建知识结构族。

输入: 模糊技能多映射 (Q, S, μ) 。

输出: 知识结构族 \mathcal{K}_{γ_1} 。

1) 对 (Q, S, μ) 中各技能对应隶属度值进行排序并得到各技能 s_i 所对应的区间 U_{ij} ;

2) 计算所有 $[T_l]$ 和 U_{ij} 的对应关系矩阵 P ;

3) 将 (Q, S, μ) 分解为 p 个模糊技能映射 τ_h ($h = 1, 2, \dots, p$), 分别计算对应的矩阵 M^h ;

4) 分别计算 p 个模糊技能映射 τ_h 的模糊能力包含度矩阵 D^h , 并求得关于 μ 的模糊能力包含度矩阵 D , 计算模糊能力包含度集 $D(\mu)$;

5) 从 $D(\mu)$ 中取值 γ_{1d} ($d = 1, \dots, |D(\mu)|$), 计算余矩阵 $B^{\gamma_{1d}}$;

6) 将 $B^{\gamma_{1d}}$ 中相同的列仅保留其一, 其余删去, 则得到约简后的余矩阵 $B^{\gamma_{1d}}$;

7) 将 $B^{\gamma_{1d}}$ 中的各列转化为 Q 的子集表示, 得到知识结构 $\mathcal{L}^{\gamma_{1d}}$;

8) 遍历 $D(\mu)$ 中各包含度值, 重复步骤 5)~7), 求得知识结构族 \mathcal{K}_{γ_1} 。

算法 1 中, 步骤 1) 需遍历各 $\mu(q)$ 中的能力, 并对技能隶属度值进行排序, 记 $n_c = \sum_{q \in Q} |\mu(q)|$ 为 (Q, S, μ) 所有能力数, 因此最大时间复杂度为 $O((n_c)^2 \cdot |S|)$, 最大空间复杂度为 $O(n_c \cdot |S|)$ 。步骤 2) 中需生成 P 矩阵, 但每列仅对每个技能对应区间中的一个设置“1”, 而矩阵的列数为 $n_k = |F(S) / \sim| = \prod_{s \in S} (n_s + 1)$, $n_s = |\{C_q(s) \in (0, 1) : q \in Q\}|$, 所以最大时间复杂度和最大空间复杂度均为 $O(|S| \cdot n_k)$ 。步骤 3) 中, 由于 $M^h, h = 1, \dots, n_M, n_M = \prod_{q \in Q} |\mu(q)|, M^h$ 的

行数为问题数 $|Q|$, 列数为区间数 $n_U = \sum_{s \in S} (n_s + 1)$, 所以最大时间复杂度与最大空间复杂度均为 $O(|Q| \cdot n_U \cdot n_M)$ 。步骤4)中, 使用推论3进行计算, 最大时间复杂度为 $O(|Q| \cdot n_U \cdot n_k)$, 最大空间复杂度为 $O(n_U \cdot n_k)$ 。步骤5)~7)的最大时间复杂度为 $O(n_k \cdot \max(|Q|, \log n_k))$, 最大空间复杂度是 $O(|Q| \cdot n_k)$ 。综上分析, 算法1的最大时间复杂度为 $O(|Q| \cdot n_U \cdot n_k)$, 最大空间复杂度为 $O(|Q| \cdot n_U \cdot n_M)$ 或 $O(n_U \cdot n_k)$ 。易见算法的效率与 $|Q|, n_U, n_k, n_M$ 等有较大关系。

下面例5中沿用例4的结果说明算法1中步骤4)~8)的过程。

例5 分别计算8个模糊技能映射 $\tau_h (h = 1, 2, \dots, 8)$ 的模糊能力包含度矩阵 D^h , 并通过求解各 D^h 中对应位置的最大值, 求得关于 μ 的模糊能力包含度矩阵 D 。求得的本例中的 D 矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } D(\mu) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}.$$

当 $\gamma_1 \in [0, \frac{1}{2})$, 计算余矩阵 $B^{\gamma_{11}}$, 并对 $B^{\gamma_{11}}$

中相同的列保留其一, 其余删去, 得到 $B^{\gamma_{11}}$,

$$B^{\gamma_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^{\gamma_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

同样地, 当 $\gamma_1 \in [\frac{1}{2}, 1)$, 可计算得到 $B^{\gamma_{12}}$ 。

分别将 $B^{\gamma_{11}}$ 和 $B^{\gamma_{12}}$ 的每一列转换为 Q 的子集表示, 得到知识结构 $\mathcal{L}^{\gamma_{11}}$ 和 $\mathcal{L}^{\gamma_{12}}$, 即

$$\mathcal{L}^{\gamma_{11}} = \{\emptyset, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_3, q_4\}, Q\};$$

$$\mathcal{L}^{\gamma_{12}} = \{\emptyset, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_3, q_4\}, \{q_2, q_3, q_4\}, Q\},$$

则得到知识结构族 $\mathcal{K}_{\gamma_1} = \{\mathcal{L}^{\gamma_{11}}, \mathcal{L}^{\gamma_{12}}\}$ 。

4 实验结果及分析

为验证算法1的有效性, 选取和处理数据集数据, 构造了9个模糊技能多映射进行实验分析。实验的硬件环境为 Intel(R) Core(TM) i5-1035G1 CPU 和 8 GB 内存, 软件环境为 Windows 10、64 位操作系统, Matlab(R2023b)。

4.1 实验数据

从 UCI(<https://archive.ics.uci.edu/datasets>) 数据库 中 选 取 Chemical Composition of Ceramic Samples、Wine Quality 和 national health and nutrition health survey 2013—2014 (NHANES) age prediction subset 3 个数据集, 将数据集中的对象视为问题, 将属性视为技能, 对其中的数据进行离散化、归一化等处理, 生成9个新数据集, 并在此基础上构造9个模糊技能多映射, 分别记为 $(Q_i, S_i, \mu_i), i = 1 \sim 9$, 如表1所示, 其中: $|Q_i|$ 表示问题数; $|S_i|$ 表示技能数; $\sum_{q_x \in Q_i} |\mu_i(q_x)|$ 表示 $\mu_i(q_x)$ 中所含能力数。

4.2 实验结果

根据算法1, 可求解出模糊技能多映射的能力包含度集和知识结构。表1中 $|F(S)/ \sim |$ 为对模糊集 $F(S)$ 等价划分后等价类的个数, 即 $[T]$ 的个数; $|D(\mu)|$ 为模糊能力包含度集的能力包含度值个数; $|\mathcal{K}|$ 为诱导的知识结构个数。

表1 不同模糊技能多映射的能力包含度和知识结构

Table 1 Competence inclusion and knowledge structure of different fuzzy skill multimaps

序号	(Q_i, S_i, μ_i)	$ Q_i $	$ S_i $	$\sum_{q_x} \mu_i(q_x) $	$ F(S)/ \sim $	$ D(\mu_i) $	$ \mathcal{K} $
1	(Q_1, S_1, μ_1)	6	8	9	5 832	9	8
2	(Q_2, S_2, μ_2)	6	5	10	960	5	4
3	(Q_3, S_3, μ_3)	9	4	11	192	5	4
4	(Q_4, S_4, μ_4)	6	6	9	288	7	6
5	(Q_5, S_5, μ_5)	6	7	9	288	7	6
6	(Q_6, S_6, μ_6)	6	4	11	240	5	4
7	(Q_7, S_7, μ_7)	7	4	8	90	5	4
8	(Q_8, S_8, μ_8)	8	4	14	400	5	4
9	(Q_9, S_9, μ_9)	10	4	17	336	3	2

在实验中对算法的运行时间和所占用存储空间进行记录, 对多次运行得到的时间值和占用存储量进行平均, 得到表2的结果。这里存储空间占用主要以 Matlab 中工作空间存储量作为依据。由表2

可以得出,当技能多映射产生的 $|F(S)/\sim|$ 数值较大,则运算量也会增大,且存储量也大幅提高,如 (Q_1, S_1, μ_1) 。 $|F(S)/\sim|$ 的大小与模糊技能多映射中各技能所具有的模糊值多少有关,模糊值越多,划分的等价类就越多,算法需要占用的存储空间就越大。

表2 算法运行时间和所占用存储空间大小

Table 2 Time taken and storage space occupied to run the algorithm

序号	(Q_i, S_i, μ_i)	运行时间/ ms	存储空间占用/ GB
1	(Q_1, S_1, μ_1)	115.96	2.3
2	(Q_2, S_2, μ_2)	51.59	0.6
3	(Q_3, S_3, μ_3)	80.26	0.1
4	(Q_4, S_4, μ_4)	50.29	0.2
5	(Q_5, S_5, μ_5)	51.73	0.2
6	(Q_6, S_6, μ_6)	39.30	0.3
7	(Q_7, S_7, μ_7)	41.58	0.1
8	(Q_8, S_8, μ_8)	79.05	0.6
9	(Q_9, S_9, μ_9)	87.96	1.6

为了进一步考查问题与技能个数与算法运行时间和空间的关系,分别将以下两种情况用折线图进行表示。

1) 选取问题个数相同,但技能数不同的第1、2、4、5、6模糊技能多映射,考查技能数对运行时间和存储空间的影响,见图1。

2) 选取技能个数相同,但问题数不同的第3、6、7、8、9模糊技能多映射,考查问题数对运行时间和存储空间的影响,见图2。

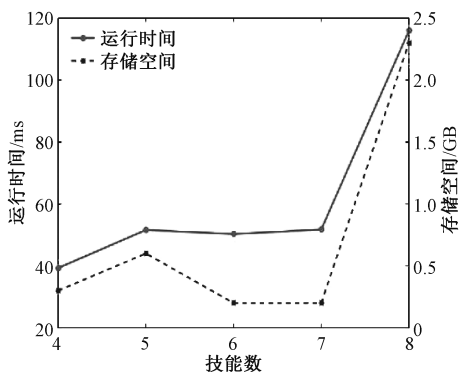


图1 技能数与运行时间和存储空间的关系

Figure 1 The relationship between the number of skills, time taken, and storage space occupied

从图1和图2中可以看到,当问题数不变而技能数增加或技能数不变而问题数增加时,运行时间是会随着增加的,但运行所需存储容量不一定增加。运行时间的增加一般较缓和,这体现了算法在

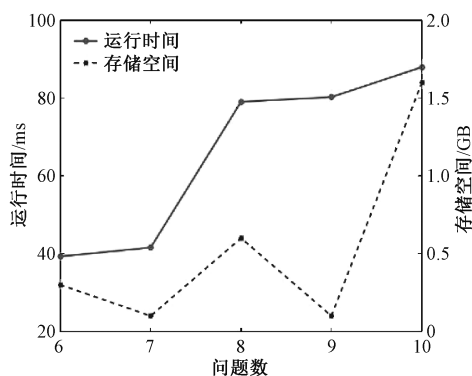


图2 问题数与运行时间和存储空间的关系

Figure 2 The relationship between the number of items, time taken, and storage space occupied

时间上是效率较优的,但也看到,当模糊技能多映射中各技能包含的模糊值越多,划分的等价类越多,运行所需存储容量就可能大幅增加并带来运行时内存溢出的问题。

5 结语

本文在模糊技能多映射的变精度 α -能力模型的基础上,研究了阈值取值范围为 $[0,1)$ 和 $(0,1)$ 时的模型变化,提出三种基于模糊技能多映射的变精度能力模型,即模糊变精度 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -能力模型,并讨论了这三种模型构建知识结构的性质,证明了四种变精度模糊能力模型构建的知识结构族是一致的。在此基础上以变精度 γ_1 -能力模型为例提出构建知识结构的矩阵算法,分析了算法的时空复杂度。最后通过实验验证了算法的可行性和有效性。该算法也适用于其他三个模型。矩阵算法的提出能促进基于模糊技能多映射的能力模型构建知识结构的实际应用,但也应看到,对于实际应用中较复杂的问题集,如解决问题的能力中技能的熟练程度要求较多,可能带来计算量骤增的情况,这对计算机的运算速度和存储容量提出较高要求。因此,面向大规模数据的知识结构构建和分析是今后研究的一个方向。

参考文献:

- [1] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. Learning spaces: interdisciplinary applied mathematics [M]. Berlin: Springer Press, 2011.
- [2] 李金海,张瑞,智慧来,等. 知识空间理论综述[J]. 模式识别与人工智能, 2024, 37(2): 106-127.
LI J H, ZHANG R, ZHI H L, et al. A review of knowledge space theory [J]. Pattern recognition and artificial

- intelligence, 2024, 37(2): 106-127.
- [3] 智慧来, 李金海. 面向知识结构分析的模糊概念格模型[J]. 软件学报, 2024, 35(5): 2466-2484.
ZHI H L, LI J H. Fuzzy concept lattice models for knowledge structure analysis [J]. Journal of software, 2024, 35(5): 2466-2484.
- [4] COSYN E, UZUN H, DOBLE C, et al. A practical perspective on knowledge space theory: ALEKS and its data [J]. Journal of mathematical psychology, 2021, 101: 102512.
- [5] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Knowledge spaces [M]. Berlin: Springer Press, 2012.
- [6] 李进金, 孙文. 知识空间、形式背景和知识基[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2019, 49(4): 517-526.
LI J J, SUN W. Knowledge space, formal context and knowledge base[J]. Journal of northwest university (natural science edition), 2019, 49(4): 517-526.
- [7] 周银凤, 李进金, 冯丹露, 等. 形式背景下的学习路径与技能评估[J]. 模式识别与人工智能, 2021, 34(12): 1069-1084.
ZHOU Y F, LI J J, FENG D L, et al. Learning paths and skills assessment in formal context[J]. Pattern recognition and artificial intelligence, 2021, 34(12): 1069-1084.
- [8] LIU G L. Rough set approaches in knowledge structures [J]. International journal of approximate reasoning, 2020, 138: 78-88.
- [9] SUN W, LI J J, GE X, et al. Knowledge structures delineated by fuzzy skill maps[J]. Fuzzy sets and systems, 2021, 407: 50-66.
- [10] HELLER J, STEFANUTTI L. Knowledge structures and their competence-based extension [M]//Knowledge Structures. Singapore: World Scientific Publishing, 2024: 3-26.
- [11] 杨桃丽, 李进金, 李招文, 等. 基于技能构建知识结构的两种变精度模型与技能子集约简[J]. 模式识别与人工智能, 2022, 35(8): 671-687.
YANG T L, LI J J, LI Z W, et al. Two kinds of variable precision models based on skill for constructing knowledge structures and skill subset reduction[J]. Pattern recognition and artificial intelligence, 2022, 35(8): 671-687.
- [12] XU B C, LI J J. The inclusion degrees of fuzzy skill maps and knowledge structures [J]. Fuzzy sets and systems, 2023, 465: 108540.