第 48 卷第 1 期
2016 年 3 月
郑州大学学报(理学版)
J. Zhengzhou Univ. (Nat. Sci. Ed.)
Vol. 48 No. 1
Mar. 2016

有序 Banach 空间非线性 Neumann 边值问题正解的存在性

李小龙， 张 骞

(陇东学院 数学与统计学院 甘肃 庆阳 745000)

摘要: 讨论了有序 Banach 空间 E 中的边值问题

$$-u''(t)+Mu(t)=f(t,u(t)),0\leqslant t\leqslant 1,u'(0)=u'(1)=\theta$$

的正解,其中 f: $[0,1]\times P\to P$ 连续,P 为 E 中的正元锥. 通过新的非紧性测度的估计技巧与凝聚映射的不动点指数理论获得了该问题正解的存在性结果.

关键词: Neumann 边值问题; 闭凸锥; 正解; 凝聚映射; 不动点指数

中图分类号: O175.15 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-6841(2016)01-0023-04

DOI: 10.3969/j.issn.1671-6841.201503006

0 引言

设 E 为有序 Banach 空间,其正元锥 P 为正规锥,正规常数为 N,记 $I=[0,1]$,设 $C(I,E)$ 为定义于 I 取值于 E 的全体连续函数按范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in I}\|u(t)\|$ 构成的 Banach 空间,记 $C(I,P)=\{u\in C(I,E)\mid u(t)\in P,t\in I\}$,则 $C(I,P)$ 为 $C(I,E)$ 中的正规锥,正规常数亦为 N,以下使用的 $C(I,E)$ 中半序 $\leqslant$ 由 $C(I,P)$ 引出. 本文讨论 E 中的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)+Mu(t)=f(t,u(t)),t\in I,\\ u'(0)=u'(1)=\theta\end{cases}\tag{1}$$

的正解,其中 $M>0$ 为常数,f:$I\times P\to P$ 连续.

方程(1)的解和正解的存在性已有许多结论[1-6],主要利用不动点定理和单调迭代方法,但在一般的 Banach空间中讨论的较少. 本文在一般的 Banach 空间中,利用凝聚映射的不动点指数理论讨论了方程(1)正解的存在性. 所得结果改进了文献[1—6]中的相关结论,并且是文献[7—8]在 Banach 空间中的推广,相应结果如文献[9]. 方程(1)的正解是指 $u\in C^2(I,E)$ 满足方程(1),并且 $u(t)>\theta,0<t<1$. 定义算子 Q 如下:

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s=(Qu)(t).\tag{2}$$

由文献[2]知,(2)中 $G(t,s)$ 为相应的 Green 函数,即

$$G(t,s)=\begin{cases}(\cosh\sqrt{M}(1-t)\ \cosh\sqrt{M}s)/(\sqrt{M}\ \sinh\sqrt{M}),0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ (\cosh\sqrt{M}t\ \cosh\sqrt{M}(1-s))/(\sqrt{M}\ \sinh\sqrt{M}),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}\tag{3}$$

易证方程(1)的解即为积分算子 Q 的不动点. 文中 E 与 $C(I,E)$ 中有界集的 Kuratiwski 非紧性测度均由 $\alpha(\cdot)$ 表示. 对 $B\subset C(I,E)$,记 $B(t)=\{u(t)\mid u\in B\}\subset E,t\in I$. 假设 f 满足如下非紧性测度条件:

(H_0) 对 $\forall R>0,f(I\times P_R)$ 有界,且存在常数 $L=L_R\in(0,M/4)$ 使得对 $\forall t\in I,D\subset P_R$,有 $\alpha(f(t,D))\leqslant L\alpha(D)$. 其中 $P_R=\{x\in P:\|x\|\leqslant R\}$.

文献[1—3]中要求 f 在有界集上一致连续,而本文利用新的非紧性测度的计算与估计技巧[9]删去了这

收稿日期:2015-08-21
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11561038);甘肃省高等学校科研项目(2015A-149).
作者简介:李小龙(1976—),男,甘肃甘谷人,副教授,硕士,主要从事抽象发展方程及其应用研究,E-mail:lixl80@163.com.
引用本文:李小龙,张骞. 有序 Banach 空间非线性 Neumann 边值问题正解的存在性[J]. 郑州大学学报(理学版),2016,48(1):23—26.

一要求,获得了方程(1)正解的存在性结果.

1 预备知识及引理

在条件(H_0)下,为了利用凝聚映射的不动点指数理论说明(2)式定义的算子 $Q: C(I,P)\to C(I,P)$ 为凝聚映射,需要以下非紧性测度的一些结果.

引理 1[9] 设 $B\subset C(I,E)$ 为等度连续的有界函数族,则 $\alpha(B(t))$ 在 I 上连续,且 $\alpha(B)=\max\limits_{t\in I}\alpha(B(t))$.

引理 2[10] 设 $B=\{u_n\}\subset C(I,E)$ 为可列集,若存在 $\psi\in L^1(I)$ 使得 $\|u_n(t)\|\leqslant\psi(t)$, a. e, $t\in I$, $n=1,2,\cdots$,则 $\alpha(B(t))$ 在 I 上可积,且 $\alpha(\{\int_I u_n(t)\,dt\})\leqslant 2\int_I\alpha(B(t))\,dt$.

引理 3[6] 设 $D\subset E$ 有界,则存在 D 的可列子集 D_0,使得 $\alpha(D)\leqslant 2\alpha(D_0)$.

引理 4 设 $f: I\times P\to P$ 连续,假设(H_0)成立,则 $Q: C(I,P)\to C(I,P)$ 为凝聚映射.

证明 由(2)式可知,Q 把 $C(I,P)$ 中的有界集映为有界的等度连续集. 任取非相对紧的有界集 $B\subset C(I,P)$,下证 $\alpha(Q(B))<\alpha(B)$. 令 $R=\sup\{\|u\|\mid u\in B\}$,则对 $\forall t\in I$, $B(t)\subset P_R$,设 $L=L_R\in(0,M/4)$ 为假设(H_0)中的非紧性测度常数. 由引理 3 知,存在可列子集 $B_1=\{u_n\}\subset B$,使得 $\alpha(Q(B))\leqslant 2\alpha(Q(B_1))$. 故对 $\forall t\in I$,由(3)式直接计算易知 $\int_0^1 G(t,s)\,ds=1/M$. 由引理 2 及假设(H_0),有

$$
\begin{aligned}
&\alpha(Q(B_1(t)))=\alpha(\{\int_0^1 G(t,s)f(s,u_n(s))\,ds\mid n=1,2,\cdots\})\leqslant\\
&2\int_0^1\alpha(\{G(t,s)f(s,u_n(s))\mid n=1,2,\cdots\})\,ds=\\
&2\int_0^1 G(t,s)\,\alpha(f(s,B_1(s)))\,ds\leqslant 2L\int_0^1 G(t,s)\,\alpha(B_1(s))\,ds\leqslant\\
&2L\int_0^1 G(t,s)\,ds\cdot\alpha(B_1)=2LM^{-1}\cdot\alpha(B_1).
\end{aligned}
$$

因为 $Q(B_1)$ 等度连续,由引理 1 知 $\alpha(Q(B_1))=\max\limits_{t\in I}\alpha(Q(B_1(t)))\leqslant 2LM^{-1}\cdot\alpha(B_1)$. 于是有 $\alpha(Q(B))\leqslant 2\alpha(Q(B_1))\leqslant 4LM^{-1}\cdot\alpha(B_1)\leqslant 4LM^{-1}\cdot\alpha(B)<\alpha(B)$. 因此 $Q: C(I,P)\to C(I,P)$ 为凝聚映射.

由(3)式易知,Green 函数 $G(t,s)$ 具有以下性质:

(i) $0\leqslant G(t,s)\leqslant G(s,s)$, $t,s\in I$;

(ii) $G(t,s)\geqslant\delta G(t,t)G(s,s)$, $t,s\in I$,

其中 $\delta=(\sqrt{M}\sinh\sqrt{M})/\cosh^2\sqrt{M}$,取 $C(I,P)$ 的子锥

$$K=\{u\in C(I,P)\mid u(t)\geqslant\delta G(t,t)u(\tau),\ \forall t,\tau\in I\}. \tag{4}$$

引理 5 若 $f: I\times P\to P$,则 $Q(C(I,P))\subset K$.

证明 对 $\forall u\in C(I,P)$ 及 $\forall t,\tau\in I$,由(2)式和性质(i)有

$$Qu(\tau)=\int_0^1 G(\tau,s)f(s,u(s))\,ds\leqslant\int_0^1 G(s,s)f(s,u(s))\,ds,$$

又由(2)式和性质(ii)有

$$Qu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\,ds\geqslant\delta G(t,t)\int_0^1 G(s,s)f(s,u(s))\,ds\geqslant\delta G(t,t)\,Qu(\tau),$$

由(4)式,$Qu\in K$,即 $Q(C(I,P))\subset K$.

因此当 $f: I\times P\to P$ 时,$Q: K\to K$ 为凝聚映射,方程(1)的正解即为 Q 在 K 中的不动点.

引理 6[11] 设 E 为 Banach 空间,K 为 E 中的锥,$\Omega\subset E$ 为有界开集,$\theta\in\Omega$, $Q: K\cap\overline{\Omega}\to K$ 为凝聚映射,若 Q 满足 $u\neq\lambda Qu$, $\forall u\in K\cap\partial\Omega$, $0<\lambda\leqslant 1$,则不动点指数 $i(Q,K\cap\Omega,K)=1$.

引理 7[12] 设 E 为 Banach 空间,K 为 E 中的锥,$\Omega\subset E$ 为有界开集,$Q: K\cap\overline{\Omega}\to K$ 为凝聚映射,若存在 $v_0\in K$, $v_0\neq\theta$,使得 Q 满足 $u-Qu\neq\mu v_0$, $\forall u\in K\cap\partial\Omega$, $\mu\geqslant 0$,则不动点指数 $i(Q,K\cap\Omega,K)=0$.

用引理 6 与引理 7 可以得到定理 1.

2 主要结果及证明

定理 1　设 E 为有序 Banach 空间，其正元锥 P 为正规锥，$f: I\times P\to P$ 连续，条件 (H_0) 成立. 假设 f 满足如下条件之一：

(H_1) ① 存在 $\varepsilon\in(0,M)$ 及 $\delta>0$，使得当 $x\in P_\delta$ 时，$f(t,x)\leqslant(M-\varepsilon)x$；② 存在 $\eta>0$ 及 $h_0\in C(I,P)$，使得当 $x\in P$ 时，$f(t,x)\geqslant(M+\eta)x-h_0(t)$.

(H_2) ① 存在 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$，使得当 $x\in P_\delta$ 时，$f(t,x)\geqslant(M+\varepsilon)x$；② 存在 $\eta\in(0,M)$ 及 $h_0\in C(I,P)$，使得当 $x\in P$ 时，$f(t,x)\leqslant(M-\eta)x+h_0(t)$.

则方程(1)至少存在一个正解.

证明　由上面的论述可知，只需证明由(2)式定义的凝聚映射 $Q: K\to K$ 存在非零的不动点. 取 $0<r<R<\infty$，记 $\Omega_r=\{u\in K \mid \|u\|<r\}$，$\partial\Omega_r=\{u\in K\mid \|u\|=r\}$. 以下分两种情形分别证明当 r 充分小，R 充分大时 Q 在 $K\cap(\Omega_R\setminus\overline{\Omega_r})$ 上存在不动点.

情形 1　在假设 (H_1) 下，令 $0<r<\delta$，其中 δ 为 (H_1) 中的常数，证明 Q 满足引理 6 中条件

$$u\neq\lambda Qu,\ \forall u\in K\cap\partial\Omega_r,\ 0<\lambda\leqslant 1. \tag{5}$$

反设(5)式不成立，则存在 $u_0\in K\cap\partial\Omega_r$ 及 $0<\lambda_0\leqslant 1$，使得 $u_0=\lambda_0 Qu_0$. 按 Q 的定义，u_0 满足微分方程

$$\begin{cases}-u_0''(t)+Mu_0(t)=\lambda_0 f(t,u_0(t)),\ t\in I,\\ u_0'(0)=u_0'(1)=\theta,\end{cases} \tag{6}$$

方程(6)在 I 上积分，并应用假设 (H_1) 之①，有

$$M\int_0^1 u_0(t)\,\mathrm{d}t=\lambda_0\int_0^1 f(t,u_0(t))\,\mathrm{d}t\leqslant(M-\varepsilon)\int_0^1 u_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为 $0<\varepsilon<M$，故可得 $\int_0^1 u_0(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\theta$.

另一方面，因为 $u_0\in K$，按锥 K 的定义，$u_0(t)\geqslant\delta G(t,t)u_0(s)\geqslant\theta$，$\forall t,s\in I$. 于是

$$\int_0^1 u_0(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\delta u_0(s)\int_0^1 G(t,t)\,\mathrm{d}t=\left(\left(\sqrt{M}\cosh\sqrt{M}+\sinh\sqrt{M}\right)/\left(2\sqrt{M}\cosh^2\sqrt{M}\right)\right)u_0(s)\geqslant\theta. \tag{7}$$

即 $u_0(s)=\theta$ 于 I，与 $u_0\in K\cap\partial\Omega_r(\|u_0\|=r)$ 矛盾. 于是(5)式成立，故由引理 6 知，

$$i(Q,K\cap\Omega_r,K)=1. \tag{8}$$

取 $e\in P$ 使得 $\|e\|=1$，令 $v_0(t)=e$，则 $v_0(t)$ 是 $f(t,u(t))=Me$ 时方程(1)的解，由 Green 函数的性质易知 $v_0\in K\setminus\{\theta\}$，下证当 R 充分大时，有

$$u-Qu\neq\tau v_0,\ \forall u\in K\cap\partial\Omega_R,\ \tau\geqslant 0. \tag{9}$$

反设存在 $u_0\in K\cap\partial\Omega_R$ 及 $\tau_0\geqslant 0$，使得 $u_0-Qu_0=\tau_0 v_0$，则 $u_0-\tau_0 v_0=Qu_0$，按 Q 的定义，u_0 满足微分方程

$$-u_0''(t)+M(u_0(t)-\tau_0 v_0(t))=-(Qu_0)''(t)+MQu_0(t)=f(t,u_0(t)),\ t\in I. \tag{10}$$

按假设 (H_1) 之②，有

$$-u_0''(t)+Mu_0(t)=f(t,u_0(t))+M\tau_0 v_0(t)\geqslant(M+\eta)u_0(t)-h_0(t),\ t\in I,$$

两边在 I 上积分得

$$M\int_0^1 u_0(t)\,\mathrm{d}t\geqslant(M+\eta)\int_0^1 u_0(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 h_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

从而有 $\int_0^1 u_0(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{\eta}\int_0^1 h_0(t)\,\mathrm{d}t$. 结合(7)式，有

$$\theta\leqslant u_0(s)\leqslant\left(2\sqrt{M}\cosh^2\sqrt{M}/\left(\left(\sqrt{M}\cosh\sqrt{M}+\sinh\sqrt{M}\right)\eta\right)\right)\int_0^1 h_0(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall s\in I.$$

由锥 P 的正规性，有

$$\|u_0(s)\|\leqslant N\left\|\frac{2\sqrt{M}\cosh^2\sqrt{M}}{\eta\left(\sqrt{M}\cosh\sqrt{M}+\sinh\sqrt{M}\right)}\int_0^1 h_0(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant$$

$$\frac{2N\sqrt{M}\cosh^2\sqrt{M}\parallel h_0\parallel}{\eta(\sqrt{M}\cosh\sqrt{M}+\sinh\sqrt{M})}=\bar{R}.\tag{11}$$

取 $R>\max\{\bar{R},r\}$，则(9)式成立，故由引理7知，$i(Q,K\cap\Omega_R,K)=0$. 依据不动点指数的区域可加性，结合(8)式有 $i(Q,K\cap(\Omega_R\backslash\overline{\Omega_r}),K)=i(Q,K\cap\Omega_R,K)-i(Q,K\cap\Omega_r,K)=-1$. 由可解性知 Q 在 $K\cap(\Omega_R\backslash\overline{\Omega_r})$ 中至少存在一个不动点，该不动点即为方程(1)的正解.

情形2　在假设(H_2)下，取 $0<r<\delta$，证明

$$u-Qu\neq\tau v_0,\forall u\in K\cap\partial\Omega_r,\tau\geqslant 0.\tag{12}$$

其中 $v_0(t)=e\in K$，反设(12)式不成立，则存在 $u_0\in K\cap\partial\Omega_r$ 及 $\tau_0\geqslant 0$，使得 $u_0-Qu_0=\tau_0v_0$，于是 $u_0(t)$ 满足微分方程(10). 由(10)式及假设(H_2)之①有

$$-u_0''(t)+Mu_0(t)=f(t,u_0(t))+M\tau_0v_0(t)\geqslant(M+\varepsilon)u_0(t),t\in I.$$

在 I 上积分得

$$M\int_0^1u_0(t)\,\mathrm{d}t\geqslant(M+\varepsilon)\int_0^1u_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

因此有 $\int_0^1u_0(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\theta$.

于是由(7)式可得 $u_0(s)=\theta$ 于 I，与 $u_0\in\partial\Omega_r$ 矛盾. 因此(12)式成立，故由引理7知

$$i(Q,K\cap\Omega_r,K)=0.\tag{13}$$

再证当 R 充分大时，有

$$u\neq\lambda Qu,\forall u\in K\cap\partial\Omega_R,0<\lambda\leqslant 1.\tag{14}$$

假设存在 $u_0\in K$ 及 $0<\lambda_0\leqslant 1$，使得 $u_0=\lambda_0Qu_0$，则 u_0 满足微分方程(6). 将方程(6)在 I 上积分并应用假设(H_2)之②得

$$M\int_0^1u_0(t)\,\mathrm{d}t=\lambda_0\int_0^1f(t,u_0(t))\,\mathrm{d}t\leqslant(M-\eta)\int_0^1u_0(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1h_0(t)\,\mathrm{d}t.\tag{15}$$

从而有 $\int_0^1u_0(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\eta}\int_0^1h_0(t)\,\mathrm{d}t$.

由(15)式和(7)式可证明 u_0 满足(11)式，取 $R>\max\{\bar{R},r\}$，则(14)式成立，故由引理6知，$i(Q,K\cap\Omega_R,K)=1$. 于是该式结合(13)式有 $i(Q,K\cap(\Omega_R\backslash\overline{\Omega_r}),K)=i(Q,K\cap\Omega_R,K)-i(Q,K\cap\Omega_r,K)=1$. 由可解性知 Q 在 $K\cap(\Omega_R\backslash\overline{\Omega_r})$ 中至少存在一个不动点，该不动点即为方程(1)的正解.

参考文献:

[1] 郭大钧，孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 济南：山东科学技术出版社，1989.

[2] BERNFELD S，LAKSHMIKANTHAM V. Monotone methods for nonlinear boundary value problems in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal，1979，3(3)：303—316.

[3] GUO D，LAKSHMIKANTHAM V. Multiple solutions of two-point boundary value problems of ordinary differential equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl，1988，129(1)：211—222.

[4] 周友明. Banach 空间中二阶微分方程 Neumann 边值问题的解[J]. 应用数学，2004，17(3)：479—485.

[5] 宋福民. Banach 空间中两点边值问题的解[J]. 数学年刊：A 辑，1993，14(6)：692—697.

[6] 李永祥. 抽象半线性发展方程初值问题解的存在性[J]. 数学学报，2005，48(6)：1089—1094.

[7] 蒋达清，刘辉昭. 二阶微分方程 Neumann 边值问题正解存在性[J]. 数学研究与评论，2000，20(3)：360—364.

[8] SUN J P，LI W T. Multiple positive solutions to second-order Neumann boundary value problems[J]. Appl Math Comput，2003，146(2)：187—194.

[9] 刘晓亚. Banach 空间脉冲微分方程周期边值问题的正解[J]. 郑州大学学报(理学版)，2012，44(1)：15—19.

[10] HEINZ H R. On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differention and integration of vector-valued functions[J]. Nonlinear Anal，1983，7(12)：1351—1371.

[11] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科学技术出版社，1985.

[12] 余庆余. 半序 Banach 空间中的凝聚映射及其正不动点[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，1979，15(2)：23—32.

（下转第31页）

[6] 王素萍，马巧珍，邵旭馗. 梁方程的指数吸引子[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2011，33(9): 29—35.

[7] 张晓明，姜金萍，董超雨. 非线性梁方程的一致吸引子[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2014，32(5): 76—81.

[8] MA Q Z，WANG S P，CHEN X B. Uniform compact attractors for the coupled suspension bridge equations[J]. Appl Math Comput，2011，217: 6604—6615.

[9] CHEPYZHOV V V，VISHIK M I. Attractors for equations of mathematical physics[M]. Providence RI: Colloquium Publications American Mathematical Society，2002.

[10] SU S S，WU H Q，ZHONG C K. Atrractors for non-autonomous 2D Navier-stokes equations with normal external forces[J]. Discrete Contin Dyn Syst，2005，13: 701—709.

[11] MA S，ZHONG C K. The Attractors for weakly damped non-autonomous 2D Navier-stokes equations with normal external forces[J]. Discrete Contin Dyn Syst，2007，18: 53—70.

Uniform Attractors for Beam Equation

WANG Suping，SHAO Xukui

(*School of Mathematical and Statistics*，*Longdong University*，*QingYang* 745000，*China*)

Abstract: When forcing term only satisfies condition(C^*)，the existence of uniform attractors for the non-autonomous beam equations was proved in a strong topology space $E_1 = D(A) \times V$ by using the uniform condition (C).

Key words: beam equations; uniform condition(C); condition(C^*); uniform attractors

(责任编辑: 方惠敏)

(上接第 26 页)

Existence of Positive Solutions for Nonlinear Neumann Boundary Value Problems in Ordered Banach Spaces

LI Xiaolong，ZHANG Qian

(*College of Mathematics and Statistics*，*Longdong University*，*Qingyang* 745000，*China*)

Abstract: The existence of positive solutions for value problem

$$-u''(t) + Mu(t) = f(t, u(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ u'(0) = u'(1) = \theta$$

in an ordered Banach spaces E was discussed，where $f: [0, 1] \times P \to P$ was continuous，and P was the cone of positive elements in E. An existence result of positive solutions was obtained by employing a new estimate of noncompactness measure and the fixed point index theory of condensing mapping.

Key words: Neumann boundary value problem; closed convex cone; positive solution; condensing mapping; fixed point index

(责任编辑: 孔　薇)